Emmanuel Hebey
Année 2021-2022

Probabilités
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: (1) (2 pts) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements tels que $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ et $P(A) = \frac{4}{9}$. On note A^c le complémentaire de A et B^c le complémentaire de B. Calculer $P(B)$, $P(A \cap B^c)$ et $P(A^c \cap B)$.

(2) (2 pts) Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire une boule au hasard. On considère les deux événements A et B donnés par $A =$ "la boule tirée a un nombre pair", $B =$ "la boule tirée a un nombre divisible par 3". Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. Refaire les calculs si l'urne contient 7 boules. Dans quel cas les événements A et B sont-ils indépendants ?

(3) (2 pts) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 2, 4\}$. On suppose que $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\text{Var}(X) = 2$. Que vaut $\mathbb{E}(X^2)$? Déterminer la loi de X.

Exercice 2: Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini, $a \in [0, 1]$ un réel à déterminer et $X : \Omega \to [\![-2, 3]\!]$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau

k	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(k)$	0,10	0,25	0,15	0,25	0,15	a

(1) (1 pt) Quelle valeur faut-il donner à a pour que les $p_k = P_X(k)$ du tableau correspondent bien à une probabilité sur $[\![-2, 3]\!]$?

(2) (1 pt) Que vaut l'espérance de X ?

(3) (2 pts) Déterminer la loi de X^2.

(4) (1 pt) Que vaut la variance de X ?

(5) (2 pts) Que vaut la variance de $2X^2 + 1$?

Exercice 3: **(1)** (2 pts) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur un même espace, $n \geq 1$. On suppose que les X_n sont deux à deux indépendantes et que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) = \alpha^2 n$. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$. Donner un ensemble de $\varepsilon > 0$ pour lesquels on est certain d'avoir $P\left(|\overline{X}_n - \overline{p}_n| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{0{,}01}{n}$.

(2) (2 pts) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit X_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Que vaut la limite de $E(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 4: Soient $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$Y_n = X_n + X_{n+1}\ ,\ S_n = Y_1 + \cdots + Y_n\ ,\ \overline{Y}_n = S_n/n\ .$$

(1) (1 pt) Quelle est la loi de Y_n? Que valent $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$?

(2) (1 pt) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et en déduire $\mathbb{E}(\overline{Y}_n)$.

(3) (1,5 pts) Montrer que $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 2p(1-p)$. Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes?

(4) (1,5 pts) Montrer que $\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2) = 6p(1-p)$ et en déduire $\mathrm{Var}(\overline{Y}_2)$.

(5) (2 pts) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{Var}(S_n) = (4n-2)p(1-p)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{Var}(\overline{Y}_n)$.