Université de Cergy-Pontoise **Durée 4 heures**
Mathématiques L2 **Mr Hebey**
Algèbre Bilinéaire et Intégration - Janvier 2016

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barême est donné à titre indicatif. Toute note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

Questions de cours: (1) (0,5pt) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\varphi \in End(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que toutes les valeurs propres de φ sont réelles. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ces valeurs propres et $E_1, \ldots, E_k$ les espaces propres correspondants. Sous quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les E_i l'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
(2) (0,5pt) Enoncer le théorème du rang.
(3) (0,5pt) Enoncer le théorème de Sylvester.
(4) (0,5pt) Enoncer le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques.

Exercice 1: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f, g \in End(E)$ les endomorphismes de E définis par

$$f\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(x_1 + 4x_2 - x_3\big)e_1 + \big(4x_1 + 3x_3\big)e_2 + \big(-x_1 + 3x_2 - x_3\big)e_3$$
$$g\big(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\big) = \big(3x_1 - x_3\big)e_1 + \big(2x_1 + 4x_2 + 2x_3\big)e_2 + \big(-x_1 + 3x_3\big)e_3$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. On veut montrer dans cet exercice que f et g sont diagonalisables. On ne demande pas de les diagonaliser.
(1) (1pt) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f dans $\mathcal{B}$. Peut-on déjà affirmer que f est diagonalisable ? Pourquoi ?
On se propose maintenant de montrer que g est elle aussi diagonalisable.
(2) (1,5pts) Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)$ de g dans $\mathcal{B}$, calculer le polynôme caractéristique de g, et déterminer les valeurs propres de g.
(3) (1,5pts) Déterminer les sous-espaces propres de g par le calcul de bases pour ces espaces propres. Montrer que g est diagonalisable.

Exercice 2: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1y_1 + 3x_3y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 2(x_1y_3 + x_3y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^3 x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^3 y_ie_i$.
(1) (0,5pt) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(B)$ de B dans $\mathcal{B}$.
(2) (0,5pt) Montrer que les vecteurs $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = -e_1 + e_2$, et $\tilde{e}_3 = -e_1 - e_2 + e_3$ forment une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\tilde{\mathcal{B}}$.
(3) (1pt) Calculer la matrice $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(B)$ de B dans $\tilde{\mathcal{B}}$.
(4) (1pt) Si Q est la forme quadratique associée à B, donner les expressions de Q dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Que vaut la signature de Q ?

Exercice 3: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$(0{,}5\text{pt})\ I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^5+1}dx\ ,\ (0{,}5\text{pt})\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{x^2+5}dx\ ,$$

$$(1\text{pt})\ I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2}dx\ ,\ (1\text{pt})\ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x}(3x^2+1)}dx\ .$$

Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Exercice 4: On considère, pour tout x réel, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x\cos t)dt\ .$$

(1) (1pt) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
(2) (1pt) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 5: (3pts) Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \cos(x+y)dxdy \text{ et } J = \int\int_{D_2} \left(1+x^2y^3\right)dxdy$$

où $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ est donné par $D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\Big\}$, et $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ est donné par $D_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 0 \leq y \leq x \leq 1\Big\}$.

Exercice 6: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{2} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2} y_ie_i$.
(1) (1pt) Montrer que B est un produit scalaire sur E.
(2) (2pts) Trouver une base orthonormée pour B.

Exercice 7: (3pts) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille libre de E. On suppose que $(e_1, \ldots, e_k)$ n'est pas génératrice pour E. Montrer qu'il existe alors un vecteur $e_{k+1} \in E$ pour lequel la famille à $k+1$ éléments $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$ est encore libre. Quel théorème démontre-t-on facilement avec ce résultat ?