Université de Cergy-Pontoise | **Durée 3 heures**
Mathématiques L2 | **Mr Hebey**
Algèbre Bilinéaire et Intégration - Juin 2015

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1: (4pts) Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension 3 de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des réels. On considère l'application linéaire $f : E \to F$ définie par

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= (\alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3)\,\tilde{e}_1 + (x_1 + x_2 + \beta x_3)\,\tilde{e}_2 \\ &\quad + (3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3)\,\tilde{e}_3 \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ecrire la matrice de représentation de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. Si A est cette matrice, calculer le determinant de A. Montrer que pour $\beta = 1$ l'application linéaire f est un isomorphisme de E sur F pour toutes les valeurs de α mis à part deux valeurs précises que l'on calculera. Montrer que pour $\beta = 3$ l'application linéaire f est un isomorphisme de E sur F pour tout α.

Exercice 2: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note B la forme bilinéaire sur E définie par

$$B(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1) + x_3y_3$$

pour tous $x = \sum_{i=1}^{3} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{3} y_ie_i$.
(1) (2pts) Montrer que B est un produit scalaire sur E.
(2) (2pts) Trouver une base orthonormée pour B.

Exercice 3: (4pts) Enoncer le théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques. Démontrer ce théorème dans le cas spécifique de la dimension 2.

Exercice 4: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$\text{(1pt) } I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+1}dx \ , \ \text{(1pt) } I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^3+1}dx \ ,$$
$$\text{(1,5pt) } I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{x}dx \ , \ \text{(1,5pt) } I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x}(x^2+3)}dx \ .$$

Justifier vos réponses.

Exercice 5: (3pts) Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \cos(x+y)dxdy \text{ et } J = \int\int_{D_2} x^3y^2dxdy$$

où $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ est donné par $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le \pi \text{ et } 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$, et $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ est donné par $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le y \le x \le 1\right\}$.