Corrigé de l'examen de rattrapage

Questions de cours.

1. Une forme quadratique Q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie est une application $Q : E \to \mathbb{R}$ qui s'exprime, dans chaque base de E, sous la forme d'un polynôme homogène de degré deux des variables coordonnées.

2. Sous l'hypothèse de continuité de la fonction g sur l'intervalle $[0, +\infty[$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente si et seulement s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\int_0^X g(x)\,dx \underset{X \to +\infty}{\to} \ell.$$

Dans ce cas, le nombre ℓ est la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$.

3. Le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres sur un segment assure que la fonction H est continue sur $\mathbb{R}$ dès que la fonction h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Exercice 1.

1.a. Par définition, un vecteur $u = (x, y, z)$ appartient au noyau de la matrice A si et seulement si ses coordonnées satisfont

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2x + 3y - 2z = 0, \\ -2y + 4z = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = y, \\ y = y, \\ z = \frac{y}{2}. \end{cases}$$

Le noyau de la matrice A est donc engendré par le vecteur $u = (2, 2, 1)$. Comme sa norme $\|u\|$ est égale à 3, une base orthonormée du noyau de la matrice A est donnée par la famille $\mathcal{B}_1 = (e_1)$, où

$$e_1 = \frac{u}{\|u\|} = \Big(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\Big).$$

b. Le noyau de la matrice A n'est pas réduit au singleton $\{(0, 0, 0)\}$. Par conséquent, elle n'est pas inversible.

2.a. Par définition, le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par le déterminant

$$P_A = \begin{vmatrix} 2 - X & -2 & 0 \\ -2 & 3 - X & -2 \\ 0 & -2 & 4 - X \end{vmatrix}.$$

Nous développons ce déterminant par rapport à sa première colonne afin d'obtenir

$$P_A = (2 - X)\big((3 - X)(4 - X) - 4\big) - 4(4 - X) = (2 - X)(X^2 - 7X + 8) - 16 + 4X,$$

soit après simplification

$$P_A = -X^3 + 9X^2 - 18X.$$

b. Nous pouvons factoriser le polynôme caractéristique P_A sous la forme

$$P_A = -X(X^2 - 9X + 18).$$

Le discriminant du trinôme du second degré $X^2 - 9X + 18$ est égal à

$$\Delta = 81 - 4 \times 18 = 9 = 3^2,$$

de sorte que ses deux racines réelles sont 3 et 6. Nous aboutissons à la factorisation

$$P_A = -X(X-3)(X-6),$$

qui assure que la matrice A a exactement trois valeurs propres réelles $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 6$.

c. La matrice A est symétrique, donc diagonalisable. Nous pouvons également observer qu'elle est de taille 3 et qu'elle possède trois valeurs propres distinctes. Ces deux propriétés suffisent aussi à garantir qu'elle est diagonalisable.

3.a. L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est par définition le noyau de la matrice A. D'après la question 1.a, la famille $\mathcal{B}_1 = (e_1)$ est une base orthonormée de cet espace propre.

Par définition, un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient à l'espace propre de la matrice A pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$ si et seulement si ses coordonnées satisfont

$$\begin{cases} 2x - 2y = 3x, \\ -2x + 3y - 2z = 3y, \\ -2y + 4z = 3z, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = -2y, \\ y = y, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Cet espace propre est donc engendré par le vecteur $v = (2, -1, -2)$. Comme sa norme $\|v\|$ est égale à 3, une base orthonormée de cet espace propre est donnée par la famille $\mathcal{B}_2 = (e_2)$, où

$$e_2 = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\Big).$$

De même, un vecteur $w = (x, y, z)$ appartient à l'espace propre de la matrice A pour la valeur propre $\lambda_3 = 6$ si et seulement si ses coordonnées satisfont

$$\begin{cases} 2x - 2y = 6x, \\ -2x + 3y - 2z = 6y, \\ -2y + 4z = 6z, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = -\frac{y}{2}, \\ y = y, \\ z = -y. \end{cases}$$

Cet espace propre est donc engendré par le vecteur $w = (1, -2, 2)$. Sa norme $\|w\|$ vaut 3. Par conséquent, une base orthonormée de cet espace propre est donnée par la famille $\mathcal{B}_3 = (e_3)$, où

$$e_3 = \frac{w}{\|w\|} = \Big(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

b. Nous savons que la matrice des vecteurs propres

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

satisfait la formule

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

c. Comme la matrice A est symétrique, ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Les vecteurs propres e_1, e_2 et e_3 de la question 3.b sont donc deux à deux orthogonaux, ce qu'il est aussi possible de vérifier par un calcul direct des produits scalaires associés. Sachant que ces vecteurs propres sont normés, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée. De par son cardinal, elle constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. La matrice P associée est donc orthogonale, ce qui assure que

$$P^{-1} = {}^tP = P,$$

formule qu'il est aussi permis d'obtenir par un calcul direct.

Exercice 2.

1.a. Par définition, la matrice M de la forme bilinéaire B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vaut

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. La matrice M est symétrique. Aussi la forme bilinéaire B associée est-elle symétrique, ce qu'un calcul direct permet également de vérifier.

2.a. La forme quadratique Q associée à la forme bilinéaire B est égale à

$$Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

La méthode de réduction de Gauss donne alors successivement

$$Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 - 3x_3^2.$$

La signature de cette forme quadratique est donc $(2, 1)$.

b. Comme la signature de la forme quadratique Q est $(2, 1)$ d'après la question 2.a, son rang est égal à $3\,(= 2 + 1)$.

c. Si la forme bilinéaire B était un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, la signature de sa forme quadratique Q serait égale à $(3, 0)$, ce qui n'est pas le cas. La forme bilinéaire B n'est ainsi pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

3.a. La matrice $\tilde{P}$ de la famille $\tilde{\mathcal{B}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice triangulaire vaut $1 \times (1/2) \times (-1/\sqrt{3}) = -1/(2\sqrt{3}) \neq 0$. Elle est donc inversible, ce qui suffit pour montrer que la famille $\tilde{\mathcal{B}}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Nous revenons à la formule pour la forme quadratique Q déduite de la méthode de réduction de Gauss à la question 2.a. Grâce à l'identité de polarisation, cette formule se traduit pour la forme bilinéaire symétrique B par l'expression

$$B(x, y) = (x_1 - x_2 + x_3)(y_1 - y_2 + y_3) + (2x_2 - x_3)(2y_2 - y_3) - 3x_3y_3.$$

Il est alors plus simple de calculer les nombres

$$B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) = B(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) = 1, \quad B(\tilde{e}_3, \tilde{e}_3) = -1,$$

et

$$B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) = B(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = 0,$$

à partir desquels nous concluons que

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1. a. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x + \sin(x) \quad \text{et} \quad h(x) = e^x - 1.$$

La fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sachant que $g(0) = 0$, il vient

$$\forall x > 0, \quad \sin(x) + x > 0.$$

De même, la fonction h est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = e^x > 0.$$

Cette fonction est elle-aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = 0$, elle vérifie

$$\forall x > 0, \quad e^x - 1 > 0.$$

b. D'après la question 1.a, le dénominateur $x + \sin(x) + e^x - 1$ du nombre $f(x)$ est strictement positif quel que soit le choix du nombre $x > 0$. Le numérateur $\sin(\sqrt{x})$ est quant à lui bien défini lorsque $x \geq 0$. La fonction f est donc bien définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, elle est de plus continue sur cet intervalle.

2.a. Rappelons les développements limités des fonctions sinus et exponentielle à l'origine

$$\sin(u) = u + \underset{u \to 0}{o}(u) \quad \text{et} \quad e^u = 1 + u + \underset{u \to 0}{o}(u).$$

Ces développements assurent que

$$x + \sin(x) + e^x - 1 = 3x + \underset{x \to 0}{o}(x),$$

soit

$$x + \sin(x) + e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} 3x.$$

Comme $u = \sqrt{x} \to 0$ lorsque $x \to 0$, il vient aussi

$$\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + \underset{x \to 0}{o}(\sqrt{x}),$$

de sorte que

$$\sin(\sqrt{x}) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$

Le quotient des deux équivalents précédents permet de conclure que

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

b. D'après la question 1.b, la fonction f est continue sur l'intervalle $]0, 2]$. De plus, il découle de la question 2.a que

$$|f(x)| \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^2 dx/\sqrt{x}$ est convergente, l'intégrale généralisée $\int_0^2 f(x)\, dx$ est absolument convergente, donc convergente, par le principe d'équivalence.

3.a. Rappelons que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, nous obtenons

$$\forall x \geq 2, \quad g(x) \geq g(2) = 2 + \sin(2).$$

Comme $\sin(2) \geq -1$, nous concluons que

$$\forall x \geq 2, \quad x + \sin(x) \geq 1.$$

b. Il résulte de la question 3.a que

$$\forall x \geq 2, \quad x + \sin(x) + e^x - 1 \geq e^x (> 0).$$

Puisque $|\sin(\sqrt{x})| \leq 1$, nous aboutissons à

$$\forall x \geq 2, \quad |f(x)| \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

c. Rappelons que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} e^{-x}\, dx$ est convergente et qu'elle vaut

$$\int_2^{+\infty} e^{-x}\, dx = e^{-2}.$$

D'après la question 1.b, la fonction f est de plus continue sur $[2, +\infty[$. Comme sa valeur absolue satisfait l'inégalité de la question 3.b, l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente, donc convergente, par le principe de comparaison.

d. D'après les questions 2.b et 3.c, les intégrales généralisées $\int_0^2 f(x)\, dx$ et $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ sont convergentes, de sorte que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est elle-aussi convergente.