Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. *(3 points)*

1. Donner la définition d'une forme quadratique Q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

2. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Donner la définition de la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$.

3. Soit $h : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. Donner une condition suffisante sur la fonction h pour que la fonction $H : x \mapsto H(x) = \int_0^1 h(x, y)\, dy$ soit bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. *(6 points)*

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, et intéressons-nous à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.a. Déterminer une base orthonormée du noyau de la matrice A.

b. La matrice A est-elle inversible ?

2.a. Calculer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.

b. En déduire que la matrice A a trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3.

c. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3.a. Déterminer des bases orthonormées de chacun des espaces propres de la matrice A.

b. En déduire une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

c. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

Exercice 2. *(4 points)*

Considérons la forme bilinéaire définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ par

$$B(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2.$$

1.a. Écrire la matrice M de la forme bilinéaire B dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

b. La forme bilinéaire B est-elle symétrique ?

2.a. À l'aide de la méthode de réduction de Gauss, déterminer la signature de la forme quadratique Q associée à la forme bilinéaire B.

b. Quel est le rang de la forme quadratique Q ?

c. La forme bilinéaire B est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

3.a. Soit

$$\tilde{e}_1 = e_1, \quad \tilde{e}_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{e}_3 = \frac{e_1 - e_2 - 2e_3}{2\sqrt{3}}.$$

Vérifier que la famille $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice $\tilde{M}$ de la forme bilinéaire B dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Exercice 3. *(7 points)*

Soit

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x + \sin(x) + e^x - 1}.$$

1.a. Vérifier que

$$\forall x > 0, \quad x + \sin(x) > 0 \quad \text{et} \quad e^x - 1 > 0.$$

b. La fonction f est-elle bien définie sur $]0, +\infty[$? Est-elle continue sur $]0, +\infty[$?

2.a. Montrer que

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

b. L'intégrale généralisée $\int_0^2 f(x)\, dx$ est-elle convergente ?

3.a. Vérifier que

$$\forall x \geq 2, \quad x + \sin(x) \geq 1.$$

b. En déduire que

$$\forall x \geq 2, \quad |f(x)| \leq e^{-x}.$$

c. L'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ est-elle convergente ?

d. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est-elle convergente ?