**CY Cergy Paris Université** — **Algèbre linéaire, bilinéaire et intégration**
**Licence 2 MIPI** — **2020-2021**

# Contrôle continu 3 : correction

Mardi 5 janvier 2021 - Durée 1h30

**Exercice 1.** (4 points)

1. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

2. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

3. a) Si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]\alpha, \beta[\, \times [a, b]$, alors la fonction $F$ est dérivable sur $]\alpha, \beta[$.

b) L'expression de $F'(x)$ pour tout $x \in ]\alpha, \beta[$ est alors

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

**Exercice 2.** (2+1+2 points)

1. Le développement limité de $f$ à l'ordre 2 en 0 est

$$f(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o_{t\to 0}\big(t^2\big)\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_{t\to 0}\big(t^2\big)\right) - t = t^2 + o_{t\to 0}\big(t^2\big).$$

2. Comme

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - \cos(t) - t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + o_{t\to 0}\big(t^2\big)}{t^2} = 1 + \lim_{t\to 0} o_{t\to 0}(1) = 1,$$

on a l'équivalent suivant :

$$e^t - \cos(t) - t \underset{t\to 0}{\sim} t^2.$$

3. La fonction $t \mapsto \frac{e^t - \cos(t) - t}{t^\alpha}$ est continue sur tout intervalle fermé borné de $]0, 1]$, donc elle y est intégrable d'après le cours. Il nous reste à étudier l'intégrabilité en $0^+$. L'intégrande est équivalent à $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-2}}$ lorsque $t \to 0^+$ d'après la question précédente. Comme cet équivalent est de signe constant au voisinage de $0^+$, un théorème de comparaison montre que

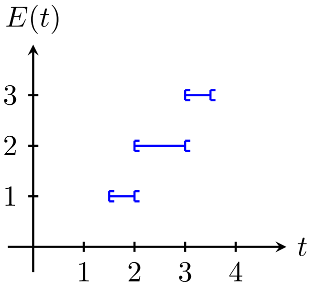
$$\int_0^1 \frac{e^t - \cos(t) - t}{t^\alpha}\, dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-2}} \quad \text{converge.}$$

D'après le critère de Riemann, cette dernière intégrale converge si et seulement si $\alpha - 2 < 1$ *i.e.* si et seulement si $\alpha < 3$. On conclut que l'intégrale $I$ est convergente si et seulement si $\alpha < 3$.

**Exercice 3.** (2+1,5 points)

1. La fonction $f$ est constante par morceaux donc en escalier :

$$f(t) = 1 \times \mathbb{1}_{\left[\frac{3}{2}, 2\right[}(t) + 2 \times \mathbb{1}_{[2,3[}(t) + 3 \times \mathbb{1}_{\left[2, \frac{7}{2}\right]}(t)$$




avec $\mathbb{1}_I$ la fonction indicatrice de l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui vaut identiquement 1 sur $I$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus I$. La subdivision associée à $f$ est donc $\left\{\frac{3}{2}, 2, 3, \frac{7}{2}\right\}$.

2. Le cours assure que $f$ est intégrable sur $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$ car elle est en escalier, et on a :

$$J = \int_{\frac{3}{2}}^{2} 1\, dt + \int_{2}^{3} 2\, dt + \int_{3}^{\frac{7}{2}} 3\, dt = \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4.$$

**Exercice 4.** (2+2,5 points)

1. Pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+9t}} = \frac{1}{\sqrt{9t\left(1+\frac{1}{9t}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{9t}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9t}}} = \frac{1}{3\sqrt{t}} \left(1 + \frac{1}{9t}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $t \to +\infty$, $\frac{1}{9t} \to 0$, donc le développement limité de $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$ en $y = 0$ nous donne :

$$\left(1 + \frac{1}{9t}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + o_{t \to +\infty}(1).$$

Il suit :

$$\frac{1}{\sqrt{1+9t}} = \frac{1}{3\sqrt{t}} \Big(1 + o_{t \to +\infty}(1)\Big).$$

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+9t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur tout intervalle fermé borné de $[1, +\infty[$, donc elle y est intégrable d'après le cours. Il nous reste à étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Comme $\frac{1}{t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, le développement limité de $\sin(y)$ en $y = 0$ nous donne :

$$\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} + o_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t}\right).$$

En utilisant la question précédente, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1+9t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{3\sqrt{t}} \Big(1 + o_{t \to +\infty}(1)\Big) \left(\frac{1}{t} + o_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

d'où l'équivalent :

$$\frac{1}{\sqrt{1+9t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3t\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme l'équivalent est de signe constant au voisinage de $+\infty$, un théorème de comparaison montre que

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+9t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{3t^{\frac{3}{2}}}\, dt \quad \text{converge.}$$

D'après le critère de Riemann, cette dernière intégrale converge car $\frac{3}{2} > 1$. On conclut que l'intégrale $K$ est convergente.

**Exercice 5.**

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par définition, on a $f(t) \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $\big(f(t)\big)^n \leq M^n$. Par croissance et linéarité de l'intégrale, ceci implique :

$$\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt \leq \int_a^b M^n \, dt = M^n \int_a^b dt = M^n(b-a).$$

Enfin, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$, il vient :

$$\left(\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt\right)^{\frac{1}{n}} \leq (M^n(b-a))^{\frac{1}{n}} = M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

2. La fonction $f$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ : il en résulte que $f$ est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$. Fixons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$. On peut supposer que $\varepsilon < M$, sinon le membre de gauche dans les deux inégalités demandées est négatif ou nul et le résultat est évident. On distingue trois cas :

i. Si $c \in ]a, b[$, alors par définition de la continuité de $f$ en $c$, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que $]c-\delta, c+\delta[ \subset [a, b]$ et tel que

$$|t-c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - M| \leq \varepsilon.$$

On pose $\alpha := c - \delta$ et $\beta := c + \delta$. Alors $-\varepsilon \leq f(t) - M \leq \varepsilon$ pour tout $t \in ]\alpha, \beta[$ et donc $f(t) \geq M - \varepsilon$. La croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$ nous donne alors $\big(f(t)\big)^n \geq (M-\varepsilon)^n$. Comme $]\alpha, \beta[ \subset [a, b]$ et $\big(f(t)\big)^n \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, la croissance de l'intégrale et sa linéarité nous donnent alors :

$$\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt \geq \int_\alpha^\beta \big(f(t)\big)^n \, dt \geq \int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n \, dt = (M-\varepsilon)^n \int_\alpha^\beta dt = (M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha).$$

Enfin, la croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}^+$ nous donne :

$$\left(\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt\right)^{\frac{1}{n}} \geq ((M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha))^{\frac{1}{n}} = (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

ii. Si $c = a$, alors par définition de la continuité de $f$ en $c$, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que $]c, c+\delta[ \subset [a, b]$ et tel que

$$|t-c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - M| \leq \varepsilon.$$

On reprend alors l'argument ci-dessus avec $\alpha := a$ et $b := c + \delta$.

iii. Si $c = b$, alors par définition de la continuité de $f$ en $c$, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que $]c-\delta, c[ \subset [a, b]$ et tel que

$$|t-c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - M| \leq \varepsilon.$$

On reprend alors l'argument ci-dessus avec $\alpha := c - \delta$ et $\beta := b$.

3. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$. En collectant les inégalités montrées aux deux questions précédentes, on obtient :

$$(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt\right)^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme le membre de gauche tend vers $M-\varepsilon$ et le membre de droite tend vers $M$ lorsque $n \to +\infty$, il existe $N > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait

$$(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} > M-2\varepsilon, \qquad M(b-a)^{\frac{1}{n}} < M+2\varepsilon.$$

Donc, pour $n > N$, on obtient :

$$M-2\varepsilon < \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt\right)^{\frac{1}{n}} < M+2\varepsilon.$$

Par définition, ceci montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^n \, dt\right)^{\frac{1}{n}} = M = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$