Contrôle N°2 - CORRIGÉ

On propose un barème détaillé pour chaque question.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$. *(1 point)*

2. Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables, c'est-à-dire si les deux points suivants sont vérifiés :
   — pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto B(x, y)$ est linéaire ;
   — pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto B(x, y)$ est linéaire. *(1 point)*

3. Un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé une valeur propre d'un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$ s'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. *(1 point)*

4. Les valeurs propres de f sont exactement les racines (réelles) du polynôme caractéristique de f. *(1 point)*

Exercice 1. *(6 points)*

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *(1 point)*

2. Le polynôme caractéristique de φ est $P_\varphi = \det(A - XI_3) = -(X-2)^2(X-1)$. Les valeurs propres sont 1 et 2. *(1 point)*

3. On trouve :

$$E_1 = \mathrm{Vect}(3e_1 - 2e_2 + e_3);$$
$$E_2 = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_3).$$

En particulier, on a $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 1 + 2 = 3 = \dim(E)$. L'endomorphisme φ est donc diagonalisable. *(2 points)*

La famille $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$, avec

$$v_1 = 3e_1 - 2e_2 + e_3$$
$$v_2 = e_1 - e_2$$
$$v_3 = e_3$$

est une base formée de vecteurs propres pour φ et la matrice B de φ dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Par formule de changement de base, on a : $B = P^{-1}AP$, puis $B^n = P^{-1}A^nP$. On trouve :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}. \text{ (1 point)}$$

5. On remarque que $v = -v_2$ est vecteur propre pour φ et que $\varphi(v) = 2v$. Il suit :

$$\varphi^3(v) = 8v = 8e_2 - 8e_1. \textit{ (1 point)}$$

Exercice 2. *(6 points)*

1. La matrice de B dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *(1 point)*

2. La réduction de Gauss donne :

$$Q(x) = B(x,x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2.$$

On en déduit que le rang de B est 2 et la signature $(1,1)$. *(1,5 point)*

3. On observe que la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{V}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible, et la famille $\mathcal{V}$ est une base. *(1 point)*

4. La matrice de passage de la base canonique vers la nouvelle base $\mathcal{V}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et avec la formule de changement de base, la matrice recherchée est :

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \textit{ (1, 5 point)}$$

5. On cherche l'ensemble $C := \{X \in \mathbb{R}^3, Q(X) = 0\}$. On trouve immédiatement (dans la base de réduction) :

$$C = \text{vect}(v_1 - v_2, v_3) \cup \text{vect}(v_1 + v_2, v_3). \textit{ (1 point)}$$

Exercice 3. *(4 points)*

1. Si on fixe y, l'application $x \mapsto B(x,y)$ est une forme linéaire, combinaison linéaire des formes linéaires coordonnées associées à la base canonique. De même, en fixant x, l'application $y \mapsto B(x,y)$ est une forme linéaire. On en déduit que B est une forme bilinéaire. *(0,5 point)*

On constate que la matrice de B dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est symétrique. *(0,5 point)*

Si $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$Q(x) = B(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0.$$

La forme B est donc positive. *(0,5 point)*

Si $B(x,x) = 0$, on trouve $x_1 + x_2 = x_2 = x_3 = 0$, puis $x = 0$ et B est définie. *(0,5 point)*

L'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

2. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Comme $B(e_1, e_1) = 1$, on pose $f_1 = e_1$. On écrit ensuite :

$$g_2 = e_2 - B(e_2, f_1)f_1,$$

qui est orthogonal à f_1. On trouve $g_2 = e_2 - e_1$, et comme $B(g_2, g_2) = 1$, on pose $f_2 = g_2$. Puis on écrit :

$$g_3 = e_3 - B(e_3, f_2)f_2 - B(e_3, f_1)f_1,$$

qui est orthogonal à f_1 et à f_2. On trouve $g_3 = e_3$, et comme $B(g_3, g_3) = 3$, on pose $f_3 = 1/\sqrt{3}\, e_3$. La base recherchée est donc :

$$(e_1, e_2 - e_1, 1/\sqrt{3}\, e_3). \textit{ (2 points)}$$

On retrouve ce résultat à partir de la base duale apparaissant dans la réduction de Gauss de Q.