Corrigé du contrôle N°1

Questions de cours.

1. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

2. L'application linéaire f est surjective si et seulement si son image $\mathrm{Im}(f)$ est égale à F.

3. La famille $(e_1, \ldots, e_N)$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_N e_N = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0.$$

4. Cette condition est $\det(A) \neq 0$.

Exercice 1.

1.a La condition nécessaire et suffisante est $a \neq 0$, car le déterminant des vecteurs de la famille $\mathcal{U}$ est donné par

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -a.$$

b. La condition résulte de la question 1.a, car trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base si et seulement s'ils sont libres.

2.a La matrice de passage s'écrit $\mathcal{M}_{\mathcal{B} \to \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b. La matrice de passage inverse vaut $\mathcal{M}_{\mathcal{U} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Nous observons que $(1, 0, 1) = (1, 2, 3) - 2(0, 1, 1) = u_3 - 2u_1$, donc les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{U}$ sont $(-2, 0, 1)$.

Exercice 2.

1.a E est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car il est défini par une équation linéaire.

b. La famille de vecteurs $\big((1, 0, -2), (0, 1, 1)\big)$ est l'une des familles qui conviennent.

c. La dimension est égale au nombre de vecteurs de la base de la question 1.b, soit à 2.

d. La droite $\mathrm{Vect}\big((1, 0, 0)\big)$ est l'un des sous-espaces qui conviennent.

2.a F est par définition un sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3).

b. Comme $v_1 - v_2 = v_3$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, et les vecteurs v_1 et v_2 forment une base de F, car ils sont linéairement indépendants.

c. Cette dimension est égale à 2, puisque la base de la question 2.b compte 2 vecteurs.

d. Comme $v_1 - v_2 = v_3$, nous pouvons omettre le vecteur v_3 dans le système linéaire pour déterminer les coefficients a, b et c :

$$\begin{cases} a + 2b + c &= 0, \\ b - c &= 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $c = b$ et la première équation devient

$$a + 2b + b = 0.$$

Donc $a = -3b$. Pour $b = 1$, la solution la plus simple est $(a, b, c) = (-3, 1, 1)$.

Exercice 3.

1. Nous raisonnons par double inclusion. Si $f(x) = 0$, alors $g \circ f(x) = g(0) = 0$. Réciproquement, si $g \circ f(x) = 0$, alors $f(x) = f \circ g \circ f(x) = f(0) = 0$, d'où l'égalité.

2. Nous raisonnons aussi par double inclusion. Si $y = g \circ f(x)$, alors, $y = g(f(x)) \in \mathrm{Im(g)}$. Réciproquement, si $y = g(x)$, alors $f(y) = f \circ g(x) = x$, d'où $y = g \circ f(y) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.

3.a En effet, nous avons la formule $(g \circ f)^2 = g \circ \big(f \circ g\big) \circ f = g \circ f$.

b. Sachant que $g \circ f$ est la projection sur $\mathrm{Im}(g \circ f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, il découle des questions 1. et 2. que

$$E = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

4. Si f est un isomorphisme, alors f est injective. Réciproquement, si f est injective, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et $E = \mathrm{Im}(g)$ par la question 3.a. L'application linéaire $g \circ f$ est donc la projection sur E parallèlement à $\{0\}$, soit l'application identité Id_E. Sachant que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$, f est un isomorphisme de E d'inverse $f^{-1} = g$.