L2 - Contrôle continu 3 - Durée 1h30

mardi 5 janvier 2021 - documents, calculatrices, téléphones portables interdits

Le total des points est sur 23. Note finale: les 17 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié. Barême donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points) Questions de cours.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est-elle convergente?
2. Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ est-elle convergente?
3. Soient $\alpha < \beta$ et $a < b$ quatre réels. Soit $f\colon]\alpha, \beta[\times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $]\alpha, \beta[\times [a, b]$. Soit $F\colon]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, dt$.
   a) Donner une condition suffisante (théorème du cours) pour que F soit dérivable sur $]\alpha, \beta[$.
   b) Quelle est alors l'expression de $F'(x)$ donnée par ce théorème?

Exercice 2. (5 points) Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^t - \cos t - t$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
2. En déduire un équivalent simple de la fonction f en 0.
3. Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - \cos t - t}{t^\alpha} dt$ est-elle convergente?

Exercice 3. (3,5 points) Soit $f\colon [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = E(t)$ ($E(t)$ désigne la partie entière d'un réel t).

1. Donner le graphe de f et expliquer pourquoi la fonction f est en escalier (on précisera en particulier une subdivision associée à f).
2. Calculer $J := \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} f(t) dt$.

Exercice 4. (4,5 points)

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \dfrac{1}{\sqrt{1+9t}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\big(1 + \varepsilon(t)\big)$ avec $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$.
2. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $K := \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+9t}} \sin\Big(\frac{1}{t}\Big) dt$.

Exercice 5. (6 points) Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction réelle positive définie et continue sur $[a, b]$. On pose $M := \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Big(\int_a^b \big(f(t)\big)^n dt\Big)^{1/n} \leqslant (b-a)^{1/n} M.$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant que la fonction f atteint son maximum en un certain point $c \in [a, b]$, montrer qu'il existe deux réels $\alpha < \beta$ appartenant à $[a, b]$ tels que
$$\forall t \in]\alpha, \beta[, M - \varepsilon \leqslant f(t).$$
   En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (M - \varepsilon)(\beta - \alpha)^{1/n} \leqslant \Big(\int_a^b \big(f(t)\big)^n dt\Big)^{1/n}.$$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b \big(f(t)\big)^n dt\Big)^{1/n} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.