CY Cergy Paris Université **Algèbre linéaire, bilinéaire et intégration**
Licence 2 MIPI **2020-2021**

Contrôle N°2

La durée de ce devoir est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. *(4 points)*

Soit n un entier strictement positif et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Donner la définition d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Donner la définition d'une forme bilinéaire $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$.

3. Donner la définition d'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ d'un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$.

4. Rappeler le lien entre le polynôme caractéristique de f et les valeurs propres de f.

Exercice 1. *(6 points)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_2 - e_3, \quad \varphi(e_2) = -3e_1 + 4e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad \varphi(e_3) = 2e_3.$$

1. Écrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Quelles sont les valeurs propres de φ ?

3. Trouver les espaces propres de φ et montrer que cet endomorphisme est diagonalisable.

On fixe une base $\mathcal{V}$ de vecteurs propres de φ, les valeurs propres étant prises dans l'ordre croissant. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{V}$; ses colonnes sont données par les éléments de $\mathcal{V}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

4. Si $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer la matrice A^n en fonction de P et de son inverse.

5. Quelle est l'image du vecteur $v = e_2 - e_1$ par l'application $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$?

Exercice 2. *(6 points)*

On considère la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3$:

$$B(x, y) = x_1y_1 + 3x_3y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 2(x_1y_3 + x_3y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2).$$

1. Donner la matrice de B dans la base canonique $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

2. En utilisant la méthode de réduction de Gauss, donner le rang et la signature de la forme quadratique Q associée à B.

3. Soient $v_1 = e_1$, $v_2 = -e_1 + e_2$ et $v_3 = -e_1 - e_2 + e_3$. Montrer que $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

4. Donner la matrice de B dans la base $\mathcal{V}$.

5. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de Q, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $Q(x) = 0$ (on pourra se placer dans la base de réduction).

Exercice 3. *(4 points)*

On pose :

$$B(x,y) = x_1y_1 + 3x_3y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2.$$

1. Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique, trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire.