CY Cergy Paris Université — **Algèbre linéaire, bilinéaire et intégration**
Licence 2 MIPI — **2020-2021**

Contrôle N°1

La durée de ce devoir est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Soit F et G deux sous-espaces de dimension finie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Écrire la formule qui relie la dimension du sous-espace $F+G$ à celles des sous-espaces F et G.

2. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Donner la définition du caractère surjectif d'une application linéaire f de E dans F.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner la définition du caractère libre d'une famille $(e_1, \dots, e_N)$ de vecteurs de E.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Sous quelle condition sur le déterminant de la matrice A cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 1. *(5 points)*

Soient $a \in \mathbb{R}$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (0,1,1), \quad u_2 = (0,a,0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1,2,3).$$

1.a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre a pour que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ soit libre.

b. En déduire que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 0$.

Nous supposons dans la suite de cet exercice que $a \neq 0$.

2. Soit $\mathcal{B} = \big(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{U}$.

b. En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{B}$.

c. Quelles sont les coordonnées du vecteur $x = (1,0,1)$ dans la base $\mathcal{U}$?

Exercice 2. *(6 points)*

Considérons les sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x - y + z = 0\big\},$$

et

$$F = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3\},$$

où $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,1,2)$.

1.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base du sous-espace E.

c. Quelle est la dimension du sous-espace E ?

d. Déterminer un sous-espace supplémentaire G de E dans $\mathbb{R}^3$.

2.a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base du sous-espace F.

c. Quelle est la dimension du sous-espace F ?

d. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } ax + by + cz = 0\}.$$

Exercice 3. *(5 points)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. Considérons deux applications linéaires f et g de E sur E telles que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_E.$$

1. Vérifier que

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g).$$

3.a. Montrer que l'application linéaire $g \circ f$ est une projection.

b. En déduire que

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

4. Conclure que l'application linéaire f est un isomorphisme de E d'inverse $f^{-1} = g$ si et seulement si f est injective.