Contrôle N°1

La durée de ce devoir est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Donner la définition d'une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

2. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et f une application linéaire de E dans F. Écrire la formule du rang pour l'application linéaire f.

3. Donner la définition de la trace d'une matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

4. Donner la valeur du déterminant de la matrice transposée ${}^tM$ d'une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ en fonction de celui de la matrice M.

Exercice 1. *(5 points)*

Soient $a \in \mathbb{R}$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (0, a, a), \quad u_2 = (1, 0, 2) \quad \text{et} \quad u_3 = (1, 1, 1).$$

1.a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre a pour que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ soit libre.

b. En déduire que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 0$.

Nous supposons dans la suite de cet exercice que $a \neq 0$.

2. Soit $\mathcal{B} = \big(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{U}$.

b. En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{B}$.

c. Quelles sont les coordonnées du vecteur $x = (0, 1, -1)$ dans la base $\mathcal{U}$?

Exercice 2. *(6 points)*

Considérons les sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\big\},$$

et

$$F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\},$$

où $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (3, 1, 0)$.

1.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base du sous-espace E.

c. Quelle est la dimension du sous-espace E ?

d. Déterminer un sous-espace supplémentaire G de E dans $\mathbb{R}^3$.

2.a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base du sous-espace F.

c. Quelle est la dimension du sous-espace F ?

d. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } ax + by + cz = 0\big\}.$$

Exercice 3. *(5 points)*

Soit

$$\mathbb{R}_3[X] = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \text{ t.q. } d^\circ(P) \leq 3\big\}.$$

Considérons l'application linéaire ϕ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \phi(P) = \frac{1}{2}X^2P'' - XP' + P.$$

1. Vérifier que l'application linéaire ϕ est bien définie de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2.a. Déterminer le noyau de l'application linéaire ϕ.

b. Déterminer l'image de cette application linéaire.

c. Cette application linéaire est-elle injective ? Est-elle surjective ?

3.a. Écrire la matrice de l'application linéaire ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. En déduire que cette application linéaire est un projecteur.