CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE L2
ALGÈBRE BILINÉAIRE ET INTÉGRATION
DE JANVIER 2020

EMMANUEL HEBEY

Exercice 1: (1) La matrice est symétrique. Elle est donc diagonalisable. Si P est le polynôme caractéristique de A, alors

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X+1)^3 + 2 + 3(X+1) \\ &= -(X^3 + 3X^2 - 4) \end{aligned}$$

On a $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(X) = -(X-1)(X^2 + aX + 4) \ .$$

En regardant les termes en X^2 (et/ou en X) on trouve que $a = 4$. Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-1)(X^2 + 4X + 4) \\ &= -(X-1)(X+2)^2 \ . \end{aligned}$$

En conclusion il y a deux valeurs propres: 1 et -2.

(2) On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui est tel que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A$. Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de f, les espaces propres de A sont les espaces propres de f etc. A titre de remarque: on sait que A est diagonalisable et donc si E_1 et E_{-2} sont les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -2 alors

$$\mathrm{dim} E_1 + \mathrm{dim} E_{-2} = 3 \ .$$

Comme 1 est de multiplicité 1 dans P on a forcément (cf. cours) que $\mathrm{dim} E_1 = 1$. Donc $\mathrm{dim} E_{-2} = 2$. On écrit que

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \ / \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \ .$$

On trouve pour système d'équations associées:

$$\begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \\ 2z = x + y \ . \end{cases}$$

Date: Le 6 Janvier 2020.

La somme des deux premières équation donne la troisième équation. Le système est donc équivalent au système

$$\begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \ . \end{cases}$$

On a les équivalences

$$\begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ 4y = 2x + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ 3y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \ / \ x = y = z\} \\ &= \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,1), x \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

On en déduit que E_1 est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = (1,1,1)$. On a $\|u\| = \sqrt{3}$. On pose

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ .$$

On écrit maintenant que

$$E_{-2} = \left\{ (x,y,z) \ / \ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \ .$$

On trouve pour système d'équations associées:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{(x,y,z) \ / \ z = -x - y\} \\ &= \{(x,y,-x-y), x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1), x,y \in \mathbb{R}\} \ . \end{aligned}$$

On en déduit que E_{-2} est engendré par $v = (1,0,-1)$ et $w = (0,1,-1)$. On sait déjà que E_{-2} est de dimension 2. Donc (v,w) est une base de E_{-2} puisqu'une famille génératrice qui a le même nombre de vecteurs que la dimension est une base (un autre argument consisterait à vérifier que (v,w) est une famille libre). On utilise maintenant Gram-Schmidt pour orthonormaliser (v,w). On a $\|v\| = \sqrt{2}$. On pose

$$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ .$$

On a $\langle w, e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$\hat{w} = w - \langle w, e_2\rangle e_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \ .$$

On a $\|\hat{w}\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. On pose

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) .$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise f. Si

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

alors P est une matrice orthogonale et

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2: (1) On développe l'expression proposée. On a que

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 4\left(y+z-2t\right)^2 + 25\left(z+t\right)^2 \\ &= 9x^2 + 4(y^2 + z^2 + 4t^2 + 2yz - 4yt - 4zt) + 25(z^2 + t^2 + 2zt) \\ &= 9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2 + 8yz - 16yt - 16zt + 25z^2 + 25t^2 + 50zt \\ &= 9x^2 + 4y^2 + 29z^2 + 41t^2 + 8yz - 16yt + 34zt \end{aligned}$$

et on retrouve bien $Q(X)$.

(2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que Φ est bien linéaire. On a que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice est triangulaire supérieure. Son déterminant est le produit des termes diagonaux. Donc

$$\det M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = 30 ,$$

et comme $\det M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) \neq 0$ on peut affirmer (cf. cours) que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$. On a $Q(X) = \tilde{Q}\left(\Phi(X)\right)$ pour tout X en vertue de la question précédente. Les formes quadratiques Q et $\tilde{Q}$ sont donc équivalentes. Or deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature. La signature de $\tilde{Q}$ est $(3, 0)$. La signature de Q est donc aussi $(3, 0)$.

(3) En vertue de la question (1), $X = (x, y, z, t)$ est un vecteur isotrope de Q si et seulement si

$$\begin{cases} 9x^2 = 0 \\ 4\left(y+z-2t\right)^2 = 0 \\ 25\left(z+t\right)^2 = 0 \ . \end{cases}$$

On trouve donc

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 2t \\ z = -t \end{cases}$$

soit encore $x = 0$, $y = 3t$ et $z = -t$. Par suite, si $\mathrm{Iso}(Q)$ est l'ensemble des vecteurs isoptropes de Q alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Iso}(Q) &= \{(0, 3t, -t, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(0, 3, -1, 1) \ / \ t \in \mathbb{R}\} \ .\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Iso}(Q)$ est la droite vectorielle engendrée par $u = (0, 3, -1, 1)$.

Exercice 3: L'intégrale $\mathbf{I_1}$ est généralisée en $+\infty$. Si f_1 est la fonction intégrée dans cette intégrale, alors f_1 est continue sur $[0, +\infty[$ et de plus

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f_1(x) = 3 \ .$$

On en déduit (critère de Riemann, $2 > 1$) que I_1 est convergente. L'intégrale $\mathbf{I_2}$ est généralisée en $+\infty$. Si f_2 est la fonction intégrée dans cette intégrale, alors f_2 est continue sur $[0, +\infty[$ et de plus

$$\lim_{x \to +\infty} x f_2(x) = \frac{2}{5} \ .$$

On en déduit (critère de Riemann, $1 \leq 1$) que I_2 est divergente. L'intégrale $\mathbf{I_3}$ est généralisée en 0. Si f_3 est la fonction intégrée dans cette intégrale, alors f_3 est continue sur $]0, \pi/2]$ et de plus

$$\lim_{x \to 0^+} x f_3(x) = 1$$

puisque $\sin(x^2) = x^2 (1 + o(1))$ lorsque $x \to 0$ (où $o(1) \to 0$ lorsque $x \to 0$). On en déduit (critère de Riemann, $1 \geq 1$) que I_3 est divergente. L'intégrale $\mathbf{I_4}$ est généralisée en 0 et en $+\infty$. Si f_4 est la fonction intégrée dans cette intégrale, alors f_4 est continue sur $]0, +\infty[$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} f_4(x) = \frac{1}{2} \ .$$

On en déduit (critère de Riemann, $1/2 < 1$ où le $1/2$ est celui de la racine carrée) que I_4 est convergente en 0. On a encore que

$$\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} f_4(x) = 2 \ .$$

On en déduit (critère de Riemann, $3/2 > 1$) que I_4 est convergente en $+\infty$. Au total I_4 est convergente.

Exercice 4: On note $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x, t) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - g(x) \cos(t) \right) \ .$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (théorèmes généraux sur la continuité). On en déduit (cf. cours) que F est continue sur $\mathbb{R}$. Clairement $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point (x, t) et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2g'(x) \cos(t) \cos \left(\frac{\pi}{4} - g(x) \cos(t) \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - g(x) \cos(t) \right) \ .$$

Toujours en vertue des théorèmes généraux sur la continuité, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On en déduit (cf. cours) que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$F'(x) = 2g'(x) \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos \left(\frac{\pi}{4} - g(x) \cos(t) \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - g(x) \cos(t) \right) dt \ .$$

En particulier, puisque $g(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
F'(0) &= 2g'(0)\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)\int_0^{\pi/2}\cos(t)dt \\
&= g'(0)\,[\sin(t)]_0^{\pi/2} \\
&= g'(0)
\end{aligned}$$

puisque $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5: On utilise Fubini sur les rectangles pour I_1 et Fubini en tranches pour I_2 et I_3. On a $D_1 = [0,1] \times [0,1]$ et par Fubini:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (1 + x^2y^3)dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left([x]_0^1 + \frac{1}{3}y^3[x^3]_0^1\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{3}y^3\right) dy \\
&= [y]_0^1 + \frac{1}{12}[y^4]_0^1 \\
&= 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}\ .
\end{aligned}$$

On a $D_2 = \{(x, y)\ /\ 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\}$, et par Fubini en tranches:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^y (1 + x^2y^3)dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left([x]_0^y + \frac{1}{3}y^3[x^3]_0^y\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(y + \frac{1}{3}y^6\right) dy \\
&= \frac{1}{2}[y^2]_0^1 + \frac{1}{21}[y^7]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{21} = \frac{23}{42}\ .
\end{aligned}$$

Enfin on a $D_3 = \left\{(x, y)\ /\ 0 \leq x \leq y^2,\ -1 \leq y \leq 1\right\}$, et par Fubini en tranches:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{y^2} (1 + x^2y^3)dx\right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left([x]_0^{y^2} + \frac{1}{3}y^3[x^3]_0^{y^2}\right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(y^2 + \frac{1}{3}y^9\right) dy \\
&= \frac{1}{3}[y^3]_{-1}^1 + 0 = \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

Exercice 6: Supposons que f et g commutent. Soit E_i un espace propre de f associé à une valeur propre λ_i. Soit $u \in E_i$. On a

$$g\left(f(u)\right) = \lambda_i g(u) = f\left(g(u)\right) \ .$$

Donc $v = g(u)$ appartient à E_i. Soit $g(E_i) \subset E_i$ puisque u est quelconque dans E_i. Si f et g commutent les espaces propres de f sont donc stables par g. Réciproquement supposons que les espaces propres de f sont stables par g. Puisque f est diagonalisable il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres. Disons que f a pour espaces propres $E_1, \dots, E_p$ et écrivons (avec abus de langage) que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ où les $\mathcal{B}_i$ sont des bases des E_i. Fixons i quelconque, notons λ_i la valeur propre pour E_i et notons $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_k^i)$. Comme $g(E_i) \subset E_i$, il existe des α_{jm}, $j, m = 1, \dots, k$, tels que pour tout $j = 1, \dots, k$,

$$g(e_j^i) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_{jm} e_m^i \ .$$

Par suite, pour tout $j = 1, \dots, k$,

$$f\left(g(e_j^i)\right) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_{jm} f(e_m^i) = \lambda_i \sum_{m=1}^{k} \alpha_{jm} e_m^i \ ,$$

tandis que

$$g\left(f(e_j^i)\right) = \lambda_i g(e_j^i) = \lambda_i \sum_{m=1}^{k} \alpha_{jm} e_m^i \ .$$

On voit donc que pour tout $i = 1, \dots, p$ et tout $j = 1, \dots, k$,

$$f\left(g(e_j^i)\right) = g\left(f(e_j^i)\right) \ .$$

En d'autres termes, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ayant la propriété que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$g \circ f(e_i) = f \circ g(e_i) \ .$$

Deux applications linéaires qui sont égales sur une base le sont sur tout l'espace. Donc $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 7: On utilse la propriété qu'un vecteur $x \in E$ est nul si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de E, donc si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in E$. Soient maintenant $x, y \in E$ quelconques et $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors pour tout $z \in E$:

$$\begin{aligned}
&\langle u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y), z \rangle \\
&= \langle u(x + \lambda y), z \rangle - \langle u(x), z \rangle - \lambda \langle u(y), z \rangle \\
&= \langle x + \lambda y, u(z) \rangle - \langle x, u(z) \rangle - \lambda \langle y, u(z) \rangle \qquad \text{(par hypothèse)} \\
&= \langle x, u(z) \rangle + \lambda \langle y, u(z) \rangle - \langle x, u(z) \rangle - \lambda \langle y, u(z) \rangle \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

On en déduit que $u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y) = 0$, et donc que

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) \ .$$

Comme x, y sont quelconques dans E et λ est quelconque dans $\mathbb{R}$, on en déduit que u est linéaire.

Exercice 8: Pour tous $x, y \in E$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle \ .$$

Si $y \in \mathrm{Ker}(u^\star)$, alors $u(y) = 0$ et donc $\langle u(x), y\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. L'espace des $u(x)$ pour x parcourant E est précisément $\mathrm{Im}(u)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(u)^\perp$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(u)^\perp$, alors $\langle u(x), y\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, et donc $\langle x, u^\star(y)\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Donc $u^\star(y) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker}(u^\star)$. Donc

$$\mathrm{Ker}(u^\star) = \mathrm{Im}(u)^\perp \ .$$

En partant de $u^\star$ on a aussi montré que $\mathrm{Ker}((u^\star)^\star) = \mathrm{Im}(u^\star)^\perp$. Sachant que $(u^\star)^\star = u$ on a donc que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^\star)^\perp$. En particulier, $\mathrm{Ker}(u)^\perp = \big(\mathrm{Im}(u^\star)^\perp\big)^\perp$, et donc (résultat admis ou cf. ci-dessous) on peut affirmer que

$$\mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{Im}(u^\star) \ .$$

On peut maintenant écrire que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rang}(u^\star) &= \mathrm{dim}\mathrm{Im}(u^\star)\\
&= \mathrm{dim}\mathrm{Ker}(u)^\perp\\
&= \mathrm{dim}E - \mathrm{dim}\mathrm{Ker}(u)\\
&= \mathrm{dim}\mathrm{Im}(u) \qquad \text{(théorème du rang)}\\
&= \mathrm{Rang}(u) \ .
\end{aligned}$$

Reste à démontrer qu'en dimension finie, pour tout sous espace vectoriel F de E: $\mathrm{dim}F^\perp = \mathrm{dim}E - \mathrm{dim}F$ et $(F^\perp)^\perp = F$. La première identité découle du théorème de la base incomplète orthonormée. On prend une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de F. On la complète en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E ($n = \mathrm{dim}E$). Les vecteurs e_i sont dans $F^\perp$ pour $i \geq p+1$, et comme $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre, on en déduit que $\mathrm{dim}F^\perp \geq n-p$. Par ailleurs, $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc $\mathrm{dim}F + \mathrm{dim}F^\perp \leq n$, de sorte qu'on a aussi que $\mathrm{dim}F^\perp \leq n-p$. D'où $\mathrm{dim}F^\perp = \mathrm{dim}E - \mathrm{dim}F$. Pour obtenir la seconde identité on remarque que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Les deux espaces ayant la même dimension en vertue de ce qui vient d'être dit, ils sont égaux.