Université de Cergy-Pontoise **Durée 4 heures**
Mathématiques L2 **Mr Hebey**
Algèbre Bilinéaire et Intégration **Janvier 2020**

Les documents ne sont pas autorisés. Le barême est donné à titre indicatif. Toute note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

Exercice 1: Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

(1) (2 pts) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si P est le polynôme caractéristique de A, calculer $P(1)$. Trouver les valeurs propres de A.
(2) (3 pts) Trouver une matrice orthogonale P pour laquelle ${}^tPAP$ est diagonale (ou encore, ce qui revient au même, trouver une base orthonormée de vecteurs propres de A).

Exercice 2: Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$Q(X) = 9x^2 + 4y^2 + 29z^2 + 41t^2 + 8yz - 16yt + 34zt$$

(1) (1 pt) Montrer que

$$Q(X) = 9x^2 + 4\left(y + z - 2t\right)^2 + 25\left(z + t\right)^2$$

pour tout $X = (x, y, z, t)$.
(2) (2 pts) Soit $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$\Phi(x, y, z, t) = (3x, 2(y + z - 2t), 5(z + t), t)$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et que $Q(X) = \tilde{Q}\left(\Phi(X)\right)$ pour tout X, où $\tilde{Q}$ est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $\tilde{Q}(X) = x^2 + y^2 + z^2$ pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. En déduire la signature de Q.
(3) (1 pt) Trouver les vecteurs isotropes de Q.

Exercice 3: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$(1pt)\ I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^4 + 1} dx\ ,\ (1pt)\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x + 3}{5x^2 + 7} dx\ ,$$

$$(1pt)\ I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx\ ,\ (1pt)\ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x}(x^2 + 2)} dx\ .$$

Justifier vos réponses. On précisera notamment en quelles bornes ces intégrales sont généralisées.

Exercice 4: (2 pts) On considère, pour tout x réel, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - g(x)\cos(t)\right) dt\ ,$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 vérifiant que $g(0) = 0$. Montrer que la fonction F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(0)$ la dérivée de F en 0 en fonction de $g'(0)$.

Exercice 5: (3 pts) Calculer les intégrales multiples

$$I = \int\int_{D_1} \left(1 + x^2 y^3\right) dxdy \ , \ J = \int\int_{D_2} \left(1 + x^2 y^3\right) dxdy \ ,$$
$$K = \int\int_{D_3} \left(1 + x^2 y^3\right) dxdy$$

où D_1, D_2, D_3 sont donnés par $D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\Big\}$, $D_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq y \leq 1\Big\}$ et $D_3 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq y^2 \leq 1\Big\}$.

Exercice 6: (3 pts) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in End(E)$ deux endomorphismes de E. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f et g commutent, à savoir $f \circ g = g \circ f$, si et seulement si les espaces propres de f sont stables par g, à savoir si et seulement si pour tout espace propre E_i de f on a $g(E_i) \subset E_i$.

Exercice 7 (question bonus 1): (2 pts) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u : E \to E$ une application de E dans E (à ce stade pas forcément linéaire). On suppose que

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in E$. Montrer que u est alors nécessairement linéaire.

Exercice 8 (question bonus 2): (2 pts) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E et $u^\star \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme adjoint. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^\star) = \mathrm{Im}(u)^\perp$, que $\mathrm{Im}(u^\star) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$ puis que u et $u^\star$ ont même rang. On pourra admettre, ou démontrer, qu'en dimension finie, pour tout sous espace vectoriel F de E: $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $(F^\perp)^\perp = F$.