Corrigé du contrôle N°1

Questions de cours.

1. Il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_N$.

2. $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

3. $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{N} B_{i,i}$.

4. $\det({}^tM) = \det(M)$.

Exercice 1.

1.a La condition nécessaire et suffisante est $a \neq 0$, car le déterminant des vecteurs de la famille $\mathcal{U}$ est donné par

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2a.$$

b. La condition résulte de la question 1.a, car trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base si et seulement s'ils sont libres.

2.a La matrice de passage s'écrit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\to\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b. La matrice de passage inverse vaut $\mathcal{M}_{\mathcal{U}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c. Nous observons que $(0,1,-1) = (1,1,1) - (1,0,2) = u_3 - u_2$, donc les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{U}$ sont $(0,-1,1)$.

Exercice 2.

1.a E est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car il est défini par une équation linéaire.

b. La famille de vecteurs $\big((1,-1,0),(1,0,-1)\big)$ est l'une des familles qui conviennent.

c. La dimension est égale au nombre de vecteurs de la base de la question 1.b, soit à 2.

d. La droite $\mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$ est l'un des sous-espaces qui conviennent.

2.a F est par définition un sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3).

b. Comme $v_1 + v_2 = v_3$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, et les vecteurs v_1 et v_2 forment une base de F, car ils sont linéairement indépendants.

c. Cette dimension est égale à 2, puisque la base de la question 2.b compte 2 vecteurs.

d. Comme $v_1 + v_2 = v_3$, nous pouvons omettre le vecteur v_3 dans le système linéaire pour déterminer les coefficients a, b et c :

$$\begin{cases} a + c & = 0, \\ 2a + b - c & = 0. \end{cases}$$

La première équation donne $c = -a$ et la deuxième équation devient

$$2a + b + a = 0.$$

Donc $b = -3a$. Pour $a = 1$, la solution la plus simple est $(a, b, c) = (1, -3, -1)$.

Exercice 3.

1. La dérivation du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ conduit successivement à

$$-XP' = -3aX^3 - 2bX^2 - cX, \quad \frac{1}{2}X^2P'' = 3aX^3 + bX^2,$$

puis $\phi(P) = aX^3 + d$, ce qui assure que ϕ est linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2.a $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}(X, X^2) = \left\{bX^2 + cX, (b, c) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

b. $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(1, X^3) = \left\{aX^3 + d, (a, d) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, l'application linéaire ϕ n'est ni injective, ni surjective.

3.a. Les calculs de la question 1. conduisent à la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Comme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\phi)^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\phi)$, $\phi \circ \phi = \phi$, donc ϕ est un projecteur.