

Corrigé de l'Examen de Fonctions de plusieurs variables (session 2)

EXERCICE 1 :

1.a) La restriction de f à $\mathcal{D}$ a l'expression : $f|_{\mathcal{D}}(x, y) = e^{x \ln(x^2+y^2)}$ et, étant composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, par les théorèmes généraux, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$ aussi.

1.b) Sur $\mathcal{D}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) e^{x \ln(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} e^{x \ln(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

1.c) Les formules ci-dessus donnent pour $(x, y) = (1, 0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = (0 + 2)e^{1 \ln 1} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$ et, par ailleurs, $f(1, 0) = 1$. D'où le DL de f en $(1, 0) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)(y - 0) + \|(x, y) - (1, 0)\|_2 \varepsilon(x, y) \\ &= 1 + 2(x - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \varepsilon(x, y).\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x, y) \rightarrow 0$ pour $(x, y) \rightarrow (1, 0)$.

2.a) On a $f|_{\mathcal{D}} = \exp \circ (2\pi_1 \ln \|\cdot\|_2)$ où π_1 est la projection sur la première coordonnée.

(car $x^2 + y^2 = \|(x, y)\|_2^2$ et $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2)$ peut s'écrire comme $(x, y) \mapsto \pi_1(x, y) \cdot \ln(\|(x, y)\|_2^2)$).

Or, $\forall (x, y) \in D$ on a : $2x \ln \|(x, y)\|_2 \leq 2\|(x, y)\|_2 \ln \|(x, y)\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $\|(x, y)\|_2 \rightarrow 0$, et comme $\exp$ est strictement croissante :

$$|f|_{\mathcal{D}}(x, y)| = f|_{\mathcal{D}}(x, y) \leq \exp(2\|(x, y)\|_2 \ln \|(x, y)\|_2) \rightarrow \exp(0) = 1 \text{ lorsque } \|(x, y)\|_2 \rightarrow 0.$$

$$\mathbf{2.b)} \text{ En } (0, 0) : x \mapsto f(x, 0) = \begin{cases} e^{2x \ln |x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ et } y \mapsto f(0, y) = \begin{cases} e^{0 \cdot \ln |y|} = 1 & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases} = 1.$$

2.c) Comme $f(0, \cdot)$ est constante = 1 elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle partout (et en $y = 0$ en particulier). Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Pour étudier l'existence en $(0, 0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ on regarde le rapport :

$$\frac{e^{2x \ln |x|} - 1}{x - 0} \simeq \frac{1 + 2x \ln |x| + o(x \ln |x|) - 1}{x} = 2 \ln |x| + o(\ln |x|) \rightarrow -\infty$$

donc la limite existe, mais étant infinie, on déduit que $f(\cdot, 0)$ n'est pas dérivable en $x = 0$ donc $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

2.d) f ne peut être différentiable en $(0, 0)$ si une de ses deux dérivées partielles n'existe en $(0, 0)$ (bien qu'elle soit continue) donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

EXERCICE 2 :

$$\mathbf{1)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(2x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin(2y)$$

$$\mathbf{2)} \quad (x, y) \text{ point critique pour } f \text{ ssi : } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 = \sin(2y) \Leftrightarrow (x, y) \in \left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)^2.$$

Puisque $\pi/2 \cong 1, 5$ dans U on a les quatre points critiques : $(0, 0)$; $(0, \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}, 0)$; $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\mathbf{3)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(2x), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \cos(2y) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \text{ donc la hessienne est}$$

$$H_f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} \cos(2x) & 0 \\ 0 & -\cos(2y) \end{pmatrix} \text{ donc la matrice est déjà diagonale.}$$

3) On calcule la hessienne spécifiquement pour chaque point critique :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ point-selle}$$

$$H_f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2},0\right) \text{ point de maximum local}$$

$$H_f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ point de minimum local}$$

$$H_f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ point-selle.}$$

EXERCICE 3 :

$g = f \circ \phi$ avec $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\phi(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Il est important de remarquer que ϕ est une application *linéaire* donc elle coïncide avec sa différentielle, autrement dit, en toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice jacobienne de ϕ coïncide avec la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Alors, compte tenu du C.M., le théorème de différentiation des composées des fonctions fournit pour la composition $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, en chaque $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'identité correspondante pour les matrices jacobienes :

$$J_{\vec{x}}(g) = J_{\phi(\vec{x})}(f) \cdot J_{\vec{x}}(\phi) = J_{\phi(\vec{x})}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi(\vec{x})).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\vec{x}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}) & \frac{\partial g}{\partial z}(\vec{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(\vec{x})) & \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(\vec{x})) & \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(\vec{x})) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right](\phi(\vec{x})) & \left[-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right](\phi(\vec{x})) & \left[-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right](\phi(\vec{x})) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a obtenu ainsi une identité entre deux matrices 1×3 , donc par identification de chacune de leur composantes on obtient en chaque $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial g}{\partial z}(\vec{x}) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right](\phi(\vec{x})) = 0(\phi(\vec{x})) = 0.$$