Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2024-2025 (**17.06.2025**)

Fonctions de plusieurs variables – Examen (session 2)

Durée : 1h30

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés

Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro

Les exercices sont indépendants. Les questions portant un astérisque sont bonus au barème.

EXERCICE 1 : Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1) Concernant le comportement de f sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

1.a) Justifier brièvement pourquoi f est continue et admet des dérivées partielles en chaque point $(x,y) \in \mathcal{D}$. Est-elle de classe C^∞ sur $\mathcal{D}$?

1.b) Donner l'expression des dérivées partielles premières de f en un quelconque point $(x,y) \neq (0,0)$.

1.c) Donner le développement limité d'ordre 1 de f en $(1,0) \in \mathcal{D}$.

2) Concernant le comportement de f en $(0,0)$:

2.a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2.b) Donner l'expression des applications partielles de f en $(0,0)$, à savoir donner $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$.

2.c) Les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ de f en $(0,0)$ existe-t-elles ?

2.d) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

EXERCICE 2 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin^2(x) + \cos^2(y)$.
Nous nous proposons d'étudier ses extrema seulement sur l'ouvert $U =]-1,2[^2$.

1) Calculer ses dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Donner la définition d'un point critique (a,b) de f.
Trouver l'ensemble $\mathscr{C}$ des points critiques de f sur U et, en faisant un dessin pour les placer dans U en déduire qu'il y en a 4 éléments (on utilisera : $1 < \pi/2 < 2$).

3) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et en déduire l'expression de la matrice Hessienne $H_f(x,y)$ de f en (x,y).

4) Pour chaque cas où (x,y) est un des quatre points critiques de f dans U, calculer la matrice Hessienne en ces points et en déduire la nature locale de ces points : extremum (min ou max) ou point-selle ?

EXERCICE 3 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Montrer que sur $\mathbb{R}^3$ on a : $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$.
(Indication : on pourrait voir g comme composée $f \circ \phi$ avec ϕ à préciser, puis calculer les matrices jacobiennes respectives, etc...)