Corrigé de l'Examen de Fonctions de plusieurs variables (session 1)

EXERCICE 1 :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \overset{\text{Obs}}{=} 12x^3 - 8xy = 4x\left(3x^2 - 2y\right)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \overset{\text{Obs}}{=} 2y - 4x^2 = 2\left(y - 2x^2\right)$

D'où : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{3}{2}x^2 \\ \text{et} \\ y = 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \cdot 0^2 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ \frac{3}{2}x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \end{cases}$

Donc la seule solution pour les deux cas est $(x,y) = (0,0)$, donc $(0,0)$ est le seul point critique tant pour f que pour g.

2)* f et g sont des fonctions *polynomiales* à deux variables, x et y, donc leur définition explicite fournit automatiquement leur D.L. au point $(0,0)$.
A priori, il n'est pas dit que $(0,0)$ est point critique pour ces fonctions, mais si le terme d'ordre 1 est manquant dans la définition de f, resp. g, puisque ce terme correspond à l'action de la différentielle en $(0,0)$ sur la variable (x,y), son absence montre que cette différentielle est nulle en $(0,0)$, autrement dit, que $(0,0)$ est point critique pour la fonction.
Dans notre cas, tant pour f que pour g on est bien dans cette situation, car leur expressions commencent par le terme d'ordre 2, à savoir y^2.

3.a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 36x^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ donc par le Thm. de Schwarz (car $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$) :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $H_f(0,0)$ est déjà diagonale et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = 0 < 2 = \lambda_2$.
Donc on ne peut décider sur la nature du point critique $(0,0)$ pour f.

3.b) On a : $f(x,y) = y^2 + 3x^2 \geqslant 0 = f(0,0)$ donc $(0,0)$ est point de minimum local pour f.
Aussi, on a égalité dans l'inégalité ci-dessus ssi $(x,y) = (0,0)$ donc c'est un minimum strict.
Il s'agit un minimum global, car l'inégalité précédente a lieu $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4.a) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 36x^2 - 8y$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = -8x$ donc par le Thm. de Schwarz :

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \implies H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On est donc dans la même situation que pour f : $H_g(0,0)$ a les valeurs propres $\lambda_1 = 0 < 2 = \lambda_2$, donc on ne peut décider sur la nature du point critique $(0,0)$ pour g non plus.

4.b)* Comme déjà expliqué à la question (2), le terme $-4x^2y$ de la définition de g est le seul terme homogène de degré 3 : $-4(\lambda x)^2(\lambda y) = \lambda^3(-4x^2y)$ donc c'est automatiquement identifiable au terme d'orde 3 du DL de g en $(0,0)$.

4.c) $(0,0)$ est point-selle pour g. En effet, en observant qu'on a : $g(x,y) - g(0,0) = (y - x^2)(y - 3x^2)$, ce produit peut changer de signe dans un voisinage arbitrairement petit du point critique $(0,0)$. En effet, si les deux parenthèses ont le même signe alors $g(x,y) \geqslant 0$ et si elles ont des signes contraires alors $g(x,y) \leqslant 0$, et il est évident que pour les deux cas de figure existent une infinité de couples $(x,y) \to (0,0)$ les satisfaisant.

Alors, en prenant convenablement des restrictions de g à des courbes du plan, par exemple : $g(x, 2x^2) = x^4(4 - 4 \cdot 2 + 3) = -x^4 \leqslant 0 \leqslant 3x^4 = g(x,0)$, on obtient ce changement de signe annoncé.

EXERCICE 2 :

1) Fixons $k = 1, \dots, n$ arbitrairement.

► Comme $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa différentielle en un $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire $\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}(\pi_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donc sa matrice dans la paire de bases canoniques correspondantes, de taille $1 \times n$, est :

$$\mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial \pi_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \ \cdots \ \frac{\partial \pi_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \ \cdots \ \frac{\partial \pi_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\Big) = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0) \quad \text{(avec "1" en } k\text{-ème position)} \qquad (\star)$$

► En tenant compte que j_k est une fonction à une seule variable réelle mais à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (donc à valeurs vectorielles), elle peut être vue comme un n-tuplet de fonctions scalaires : $j_k = (\widetilde{j}_{k,1}, \dots, \widetilde{j}_{k,n})$ avec $\widetilde{j}_{k,p} = \delta_{kp} \, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p = 1, \dots, n$.

Par conséquent, la matrice jacobienne pour j_k en un quelconque $y \in \mathbb{R}$ est une matrice $n \times 1$ qui peut être vue comme celle d'une application à valeurs vecteurs-colonne. Sa *transposée* est donc $\forall y \in \mathbb{R}$:

$${}^{\mathrm{t}}\mathrm{J}_{j_k}(y) = (\widetilde{j}'_{k,1}(y) \ \cdots \ \widetilde{j}'_{k,n}(y)) = (0 \ \cdots \ 0 \ y' \ 0 \ \cdots \ 0) = (0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0). \quad \text{(avec "1" en } k\text{-ème place)} \qquad (\star\star)$$

2)

► Pour $\forall y \in \mathbb{R}$, notons $\boldsymbol{x} = j_k(y)$. Alors, grâce à $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit le produit $\mathrm{J}_{\pi_k}(j_k(y)) \cdot \mathrm{J}_{j_k}(y) = (1)$ i.e. une matrice de taille $1 \times 1 \equiv (1 \times n) \cdot (n \times 1)$.

► Pour $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, si on note $y = \pi_k(\boldsymbol{x})$ alors $\mathrm{J}_{j_k}(\pi_k(\boldsymbol{x})) \cdot \mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x})$ est une matrice $n \times n \equiv (n \times 1) \cdot (1 \times n)$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la diagonale principale qui se trouve à l'intersection de la k-ème colonne avec la k-ème ligne, et qui vaut 1.

Autrement dit, $\mathrm{J}_{j_k}(\pi_k(\boldsymbol{x})) \cdot \mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x}) = \big(a_{lp}(\boldsymbol{x})\big)$ avec, $\forall\, l, p = 1, \dots, n, \ a_{lp}(\boldsymbol{x}) = \delta_{lp}\delta_{lk}$.

Par exemple, si $n = 3$, les produits ci-dessus correspondants à $k = 1, 2$ et 3 respectivement sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{respectivement.}$$

Il s'en suit que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, la somme $\sum_{k=1}^n \mathrm{J}_{j_k}(\pi_k(\boldsymbol{x})) \cdot \mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x})$ vaut la matrice unité $\mathbb{I}_n$.

3) Le théorème de différentiation de composées d'applications assure que :

► en chaque $y \in \mathbb{R}$, $(\pi_k \circ j_k)'(y) = \mathrm{D}_{j_k(y)}(\pi_k) \circ j'_k(y)$, ainsi que

► en chaque $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum_{k=1}^n j_k \circ \pi_k\Big) = \sum_{k=1}^n \mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}(j_k \circ \pi_k) = \sum_{k=1}^n j'_k(\pi_k(\boldsymbol{x})) \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\pi_k$.

Or, les produits de matrices jacobiennes calculés à la question précédente ne sont que la "version matricielle" des membres de droite des relations ci-dessus.

On a donc, compte tenu des résultats de la question (2) :

► en chaque $y \in \mathbb{R}$, $(\pi_k \circ j_k)'(y) = 1$, (à interpreter comme ci-dessous à (5), voir partie en lettres italiques)

► en chaque $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum_{k=1}^n j_k \circ \pi_k\Big) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

4) $\forall k = 1, \dots, n$, pour $\pi_k \circ j_k$, respectivement $j_k \circ \pi_k$, on a les chaînes de compositions :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \xrightarrow{j_k} \qquad \mathbb{R}^n \qquad \xrightarrow{\pi_k} \qquad \mathbb{R} \\ y \longmapsto j_k(y) := (0, \dots, 0, y, 0, \dots, 0) \longmapsto y = (\pi_k \circ j_k)(y) \end{cases} \quad \text{i.e. } \pi_k \circ j_k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\,.$$

$$\begin{cases} \qquad \mathbb{R}^n \qquad \xrightarrow{\pi_k} \qquad \mathbb{R} \qquad \xrightarrow{j_k} \qquad \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \pi_k(\boldsymbol{x}) := x_k \longmapsto (0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) = (j_k \circ \pi_k)(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

d'où, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, on obtient $\sum_{k=1}^n (j_k \circ \pi_k)(\boldsymbol{x}) = (x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{x}$.

5)* Les applications π_k et j_k sont *linéaires* entre les espaces vectoriels entre lesquels elles agissent.

Or, un résultat du cours (voir Proposition 5.3 et une Remarque qui lui suit) affirme que :

Pour une application <u>linéaire</u> $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, sa différentielle en tout point $\boldsymbol{x}$ de l'espace vectoriel de départ coïncide avec l'application elle-même : $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}(\ell) = \ell$. Noter que si $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{D}_x(\ell) \equiv \ell'(x) = \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ et alors $\ell'(x)$ est vue comme l'application linéaire de multiplication par $\boldsymbol{y}$: $\mathbb{R} \ni t \mapsto [\ell'(x)](t) := \boldsymbol{y}t$.

Par conséquent, vu que $\pi_k \circ j_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $j_k \circ \pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont linéaires,

► Sachant que à (3) on a montré que $\forall y \in \mathbb{R}$, $1 = (\pi_k \circ j_k)'(y)$, d'après ce que a été dit ci-dessus, ce dernier vaut la composition d'applications linéaires $\pi_k \circ j_k$ dont l'action linéaire : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est celle de multiplication de chaque $t \in \mathbb{R}$ par la constante $1 : \mathbb{R} \ni t \mapsto [(\pi_k \circ j_k)'(y)](t) := 1 \cdot t$, donc : $\pi_k \circ j_k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

► Toujours à (3) on a montré que en chaque $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum_{k=1}^n j_k \circ \pi_k\Big)$. Or, d'après ce que a été dit ci-dessus, le membre de droite vaut la somme de compositions d'applications linéaires $\sum_{k=1}^n j_k \circ \pi_k$.

EXERCICE 3 :

1) $X^* = X \setminus \{(0,0)\}$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, $\forall\, \epsilon > 0$,

- La boule ouverte $B((1,0);\epsilon)$ contient le point $(1, \epsilon/2) \notin X^*$, donc X^* n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Aussi, sachant que $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus X^*$, la boule ouverte $B((0,0);\epsilon)$ contient le point $(\epsilon/2, 0) \in X^*$, donc la complémentaire de X^* en $\mathbb{R}^2$ n'est pas un ouvert, i.e. X^* n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2) La fonction $f|_{\mathcal{D}}$ (restriction de f à $\mathcal{D}$) est bien définie par l'expression $\dfrac{\sin(xy)}{y}$. Alors, sachant que $(x,y) \mapsto xy$ est $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ leur composée est $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et sa division par $(x,y) \overset{\pi_2}{\longmapsto} y$, elle-même linéaire et $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, donne naissance à $f|_{\mathcal{D}}$ qui est donc C^∞ là où π_2 est non-nulle, i.e. sur $\mathcal{D}$.

3.a & b)

$$x \mapsto f(x,0) = x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) := \frac{df(\bullet,0)}{dx}(0) = 1$$

$$y \mapsto f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(0\cdot y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3.c) On tient compte du fait que $f(0,0) = 0$. Alors :

- si $y \neq 0$ et $x \neq 0$: $|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\dfrac{\sin(xy)}{y}\right| \leqslant \left|\dfrac{\sin(xy)}{xy}\right| \cdot |x| \leqslant 1 \cdot |x| = |x|$
- si $y \neq 0$ et $x = 0$: $\left|\dfrac{\sin(0\cdot y)}{y}\right| = 0 \leqslant |x|$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$.
- si $y = 0$ on a : $|f(x,y) - f(0,0)| = |x|$.

Donc dans tous les cas, on a : $|f(x,y) - f(0,0)| \leqslant |x| \leqslant \|(x,y)\|_2 \to 0$ i.e. f est continue en $(0,0)$.

3.d)* On rappelle que f est différentiable en $(0,0)$ ssi la fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\varepsilon(x,y) := \begin{cases} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y}{\|(x,y)\|_2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$.

Or, d'après le calcul de la question (2) on a :

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\sin(xy)}{y} - 1\cdot x - 0\cdot y}{\|(x,y)\|_2} & \text{si } \|(x,y)\|_2 \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ \dfrac{x - 1\cdot x - 0\cdot y}{\|\,(x,y\|_2} = 0 & \text{si } \|(x,y)\|_2 \neq 0 \text{ et } y = 0 \\ 0 & \text{si } \|(x,y)\|_2 = 0 \end{cases}$$

Or $\varepsilon(0,y) = 0$ quand $y \neq 0$, donc on peut se résumer à considérer le cas $x \neq 0 \neq y$, pour lequel on a :

$$|\varepsilon(x,y) - 0| = \frac{|\sin(xy) - xy|}{|y|\cdot\|(x,y)\|_2} \leqslant \frac{|\sin(xy) - xy|}{|y|\cdot|x|} = \left|\frac{\sin(xy)}{xy} - 1\right| \to 0$$

la convergence étant uniforme en (x,y) quand $(x,y) \to 0$ puisque l'expression ci-dessus dépend uniquement de la variable réelle $u = xy$ (pour laquelle on a $2|u| \leqslant \|(x,y)\|_2^2 \to 0$).

3.e)* Le développement limité à l'ordre 1 de f en $(0,0)$ est :

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \|(x,y)\|_2\,\epsilon(x,y) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ x & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}, \quad \text{où } \epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ est t.q. } \epsilon(x,y) \to 0$$

En réalité, on peut le prendre sur $\mathbb{R}^2$ comme étant juste la première ligne ci-dessus.

4.a) Tout comme à (3.a), on a : $x \mapsto f(x,0) = x \implies \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) := \dfrac{df(\bullet,0)}{dx}(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a} = 1.$

Or, comme $a \neq 0$: $y \mapsto f(a,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(a\cdot y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ a & \text{si } y = 0 \end{cases}$ donc on calcule sa dérivée en 0 comme :

$$\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\sin(a\cdot y)}{y}-a}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{(ay-\frac{1}{6}a^3y^3+\mathcal{O}(y^5))-ay}{y^2}=-\frac{a^3}{6}\lim_{y\to 0}(y+\mathcal{O}(y^3))=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)=0.$$

4.b)* En chaque point $(a,0)$ avec $a\neq 0$, pour montrer que f est continue dans les points $(a,0)\in X^*$ on regarde le comportement quand $(x,y)\to(a,0)$ de :

$$|f(x,y)-f(a,0)|=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin(xy)}{y}-a\right| & \text{si } y\neq 0\\ |x-a| & \text{si } y=0\end{cases}=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin(xy)}{y}-a\right| & \text{si } y\neq 0 \text{ et } x\neq a\\ \left|\dfrac{\sin(ay)}{y}-a\right| & \text{si } y\neq 0 \text{ et } x=a\\ |x-a| & \text{si } y=0\end{cases}$$

Pour les deux dernières variantes de cette alternative les restrictions de $(x,y)\mapsto|f(x,y)-f(a,0)|$ tendent à 0 quand $(x,y)\to(a,0)$. En effet, on a : $|x-a|\leqslant\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\|(x-a,y)\|_2\to 0$, et comme $a\neq 0$, $\left|\dfrac{\sin(ay)}{y}-a\right|=|a|\cdot\left|\dfrac{\sin(ay)}{ay}-1\right|\to 0$ lorsque $|y|\leqslant\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\|(x-a,y)\|_2\to 0$.
Concernant la première variante de l'alternative ci-dessus, en utilisant

$$\sin([(x-a)+a]y)=\sin((x-a)y)\cos(ay)+\cos((x-a)y)\sin(ay)$$

on obtient, sous l'hypothèse $x\neq a$ (et en utilisant $|y|\to 0\Rightarrow|Cy^2|\leqslant|y|$, $\forall C$ dès que $|y|$ est assez petit) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(xy)}{y}-a\right| &\leqslant \left|\frac{\sin(x-a)y)}{(x-a)y}\right|\cdot|(x-a)|\cdot\left|\cos(ay)\right|+\left|\cos((x-a)y)\right|\cdot|a|\cdot\left|\frac{\sin(ay)}{ay}-1\right|\\ &\leqslant 1\cdot\|(x-a,y)\|_2\cdot 1+1\cdot|a|\cdot\left|\frac{\sin(ay)}{ay}-1\right|=\|(x-a,y)\|_2+|a|\cdot\left|\frac{(ay)^2}{6}+\mathcal{O}(a^4y^3)\right|\\ &\leqslant \|(x-a,y)\|_2+|a|^3(\tfrac{1}{6}+|a|^2)|y|^2\leqslant\|(x-a,y)\|_2+|a|^3(1+|a|^2)\|(x-a,y)\|_2^2\\ &\leqslant (1+|a|^3+|a|^5)\|(x-a,y)\|_2\to 0.\end{aligned}$$

donc, ayant exploré les trois possibilités, on obtient que f est continue en chaque $(a,0)\in X^*$, et compte tenu des questions précédentes, on peut affirmer que f est continue partout sur $\mathbb{R}^2$.

5) Les expressions des dérivées partielles premières de f se calculent sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}^2\setminus X$ par les théorèmes de dérivation usuels. En tenant compte aussi de ce qu'on a obtenu aux questions (3.a), (3.b) et (4.a) on obtient finalement que les fonctions dérivées partielles premières de f sont bien définies sur tout le $\mathbb{R}^2$ et ont les expressions (en tant que fonctions à deux variables) : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\cos(xy) & \text{si } y\neq 0\\ 1 & \text{si } y=0\end{cases}\overset{\text{Obs.}}{=}\cos(xy)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\cos(xy)-\sin(xy)}{y^2} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

6)* On a (compte tenu de son expression ci-dessus) via les "théorèmes généraux", que $\dfrac{\partial f}{\partial x}\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Observation : pour le cas de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sa continuité en $(0,0)$ est a priori à mettre en doute, ne serait-ce que par la faute du terme $\dfrac{\sin(xy)}{y^2}\overset{(0,0)}{\approx}\dfrac{xy}{y^2}=\dfrac{x}{y}$ qui est homogène d'ordre 0 seulement. Mais il faut se méfier, car, comme nous allons le voir ci-dessous, la soustraction entre les deux termes du numérateur aura un effet de compensation non-négligeable.

Il est évident qu'il suffit de s'occuper de paires $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus X$ telles que $(x,y)\to(0,0)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|&=\frac{|xy\cos(xy)-\sin(xy)|}{y^2}=\frac{1}{y^2}\left|xy\Big(1-\frac{(xy)^2}{2!}+\mathcal{O}(x^4y^4)\Big)-\Big(xy-\frac{(xy)^3}{3!}+\mathcal{O}(x^5y^5)\Big)\right|\\ &=x^2|xy|\Big(\frac{1}{3}+|\mathcal{O}(x^2y^2)|\Big)\leqslant x^2\cdot 2|xy|\leqslant\|(x,y)\|_2^3\to 0.\end{aligned}$$

où à l'avant-dernière égalité on a utilisé $|\mathcal{O}(x^2y^2)|\leqslant C$ qui est vraie toujours pour une constante strictement positive C, dépendant du choix du couple (x,y) dans un voisinage assez petit de $(0,0)$. Pour notre cas, on a pris $C=\frac{5}{3}$ juste pour des raisons "d'esthétique". Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.
Remarquer que a posteriori, cela re-démontre le résultat de la question (3.d).