Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2024-2025 (**09.01.2025)**

Fonctions de plusieurs variables – Examen (session 1)

Durée : 2h

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés
Bien soigner la rédaction. ***Toute réponse sans justification vaut zéro***
Les exercices sont indépendants. ***Les questions portant un astérisque sont bonus au barème.***

EXERCICE 1 : Soit les applications $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$f(x,y) = y^2 + 3x^4 \quad \text{et} \quad g(x,y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4.$$

1) Montrer que $(0,0)$ est le *seul* point critique pour f, mais aussi pour g.

2)* Comment peut-on déduire directement des définitions de f et g (sans aucun calcul de dérivées partielles) que $(0,0)$ est un point critique pour ces fonctions ?

3) Concernant l'application f :

3.a) Calculer $\mathrm{H}_f(x,y)$, matrice Hessienne de f en un quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis la particulariser pour le cas du point $(0,0)$. Est-ce que $\mathrm{H}_f(0,0)$ nous aide-t-elle à conclure sur la nature (d'extrémum éventuel) du point critique $(0,0)$? (Justifier !)

3.b) Montrer que $(0,0)$ est point d'extremum pour f et préciser sa nature (min ou max). L'extremum atteint par f en $(0,0)$ est-il strict ? Est-il global sur $\mathbb{R}^2$?

4) Concernant l'application g :

4.a) Calculer $\mathrm{H}_g(x,y)$, Hessienne de g en un $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis donner $\mathrm{H}_g(0,0)$. Peut-on conclure sur la nature (d'extrémum éventuel) du point critique $(0,0)$?

4.b)* Justifier pourquoi peut-on affirmer sans aucun calcul de dérivées partielles que $-4x^2y$ est le terme d'ordre trois du développement limité de g en $(0,0)$.

4.c) Trouver la nature du point critique $(0,0)$ de g : s'agit-il d'un extremum ou d'un point-selle ?

EXERCICE 2 : Pour chaque $k = 1, \ldots, n$ on définit deux applications linéaires :

- $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \xmapsto{\pi_k} x_k \in \mathbb{R}$, projection d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ sur sa k-ème coordonnée
- $\mathbb{R} \ni y \xmapsto{j_k} (0, \ldots, 0, y, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, injection canonique de $\mathbb{R}$ sur la k-ème coordonnée d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (car "y" occupe la k-ème position dans le n-uplet précédent).

On notera par "Id_E" l'endomorphisme identique d'un espace vectoriel E.
Dans la suite vous pourrez résumer vos calculs au cas $n = 3$.

1) Munissons $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ de leur bases canoniques respectives. Alors :
Pour un quelconque $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donner la matrice jacobienne $\mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x})$.
Pour un quelconque $y \in \mathbb{R}$ donner la matrice jacobienne $\mathrm{J}_{j_k}(y)$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitraires. Calculer le produit de matrices $\mathrm{J}_{\pi_k}(j_k(y)) \cdot \mathrm{J}_{j_k}(y)$.
Ensuite, calculer le produit $\mathrm{J}_{j_k}(\pi_k(\boldsymbol{x})) \cdot \mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x})$, et puis la somme $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{J}_{j_k}(\pi_k(\boldsymbol{x})) \cdot \mathrm{J}_{\pi_k}(\boldsymbol{x})$.

3) En déduire la dérivée de $\pi_k \circ j_k$ ainsi que $\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}\Big(\sum_{k=1}^{n} j_k \circ \pi_k \Big)$, différentielle en un point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ de l'application $\sum_{k=1}^{n} j_k \circ \pi_k$.

4) Montrer que : $\pi_k \circ j_k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \ \forall k = 1, \ldots, n,$ et $\sum_{k=1}^{n} (j_k \circ \pi_k) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

5)* Expliquer comment retrouve-t-on les identités de la question précédente seulement à base des conclusions obtenues à la question (3).

Tourner la page s.v.p. —>

EXERCICE 3 : Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & \text{si } \; y \neq 0 \\ x & \text{si } \; y = 0 \end{cases}.$

Notons par X l'axe Ox, i.e. $X := \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, et par X^* l'axe Ox privée de l'origine, i.e. $X^* = X \setminus \{(0,0)\}$. Notons $\mathcal{D} := \mathbb{R}^2 \setminus X$ (i.e. le plan privé de l'axe Ox).

1) Décider, en argumentant, si dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble X^* est un ouvert ou un fermé ou ni l'un ni l'autre.

2) Décider, en justifiant, si on a $f \in C^\infty(\mathcal{D})$.

3) Concernant le comportement de f en $(0,0)$:

3.a) Donner l'expression des applications partielles de f en $(0,0)$, à savoir donner $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$.

3.b) Montrer que les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ de f en $(0,0)$ existent et les donner.

3.c) f est-elle continue en $(0,0)$?

3.d)* f est-elle différentiable en $(0,0)$?

3.e) Donner le développement limité à l'ordre 1 de f en $(0,0)$.

4) Concernant le comportement de f sur X^*, i.e. en chaque point $(a,0)$ avec $a \neq 0$:

4.a) Donner l'expression des l'application partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(a,y)$. En déduire leur dérivées afin de préciser $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$.

4.b)* Montrer que f est continue dans les points $(a,0) \in X^*$, i.e. lorsque $a \neq 0$.

5) Conclure, en donnant les expressions des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tant que fonctions à deux variables.

6)* Les deux dérivées partielles premières de f sont-elles continues en $(0,0)$?

On rappelle, à toutes fins utiles :

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\sin u}{u} \right| \leqslant 1, \; \forall u \neq 0,$$

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \mathcal{O}(u^5)$$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \mathcal{O}(u^4).$$