Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2023-2024

Fonctions de plusieurs variables
Corrigé de l'Examen (session 2) du 18.06.2024 (durée : 1h30)

CORRIGÉ de l'Exercice 1 :

1) $$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}+y-0\right| \leqslant \frac{\left(x^2\right)^2}{\|(x,y)\|_2^2}+|y|$$
$$\leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^4}{\|(x,y)\|_2^2}+\|(x,y)\|_2 = \|(x,y)\|_2^2+\|(x,y)\|_2 \to 0$$
où pour la 2-ème inégalité nous avons utilisé $x^2 \leqslant x^2+y^2 = \|(x,y)\|_2^2$ (avec $\|\bullet\|_2$ la norme euclidienne en $\mathbb{R}^2$) et $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$.
L'expression de f est une fraction rationnelle de polynômes à deux variables qui sont de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc la fraction est aussi de classe C^∞ là où le dénominateur ne s'annule pas à savoir sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

2.a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,0) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+0}+0 = x^2 & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ donc $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,0) = x^2$.

$\mathbb{R} \ni y \mapsto f(0,y) = \begin{cases} \frac{0}{0+y^2}+y = y & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ donc $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(0,y) = y$.

2.b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\mathrm{d}\, f(\bullet,0)}{\mathrm{d}\, x}(x=0) = \left(x^2\right)'\Big|_{x=0} = (2x)|_{x=0} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\mathrm{d}\, f(0,\bullet)}{\mathrm{d}\, y}(y=0) = y'|_{y=0} = 1|_{y=0} = 1$$

2.c) On utilise le même argument qu'à la fin de (2.a) : sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ les fonctions partielles en un $(x_0,y_{0)}$ sont des applications rationnelles de classe C^∞ même.
En un (x,y) arbitraire de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\bullet)^4}{(\bullet)^2+y^2}+y\right)(x,y) = \frac{4x^3\left(x^2+y^2\right)-2x^5}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^3\left(x^2+2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{x^2+(\bullet)^2}+(\bullet)\right)(x,y) = -\frac{2yx^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}+1$$

2.d) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3\left(x^2+2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2yx^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}+1 & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3) On sait qu'on peut toujours donner la matrice Jacobienne dès lors que les dérivées partielles de f existent, comme : $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ donc pour le cas de $(x,y)=(0,0)$ on a $J_f(0,0) = (0 \quad 1)$, matrice 1×2.

Attention ! La différentielle "a priori" de f dans un point (x,y) est l'application linéaire $D_{(x,y)}(f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives est $J_f(x,y)$. Ainsi, cette différentielle "a priori" peut toujours être définie par :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 : \left(D_{(x,y)}(f)\right)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k \qquad (\star)$$

mais il faut prendre garde que ceci ne veut pas dire que f est différentiable en (x,y) !
Dans notre cas $(x,y)=(0,0)$ et on alors : $\left(D_{(0,0)}(f)\right)(h,k) = 0\cdot h + 1\cdot k = k$.

4) Cf. le CM, f est différentiable en (x,y) ssi :

(i) Il existe l'application différentielle "a priori" donnée par la formule ($\star$), et

(ii) L'application $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(h,k) \mapsto \varepsilon(h,k) = \begin{cases} \dfrac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - \left(D_{(x,y)}(f)\right)(h,k)}{\|(h,k\|} & \text{si} \quad (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$.

Or, puisque $\left(D_{(0,0)}(f)\right)(h,k) = k$ on a : $\varepsilon(h,k) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{h^4}{h^2+k^2} + k - 0 - k}{(h^2+k^2)^{1/2}} & , (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & , (h,k) = (0,0) \end{cases}$

Or $\left|\dfrac{h^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{(h^2+k^2)^2}{\|(h,k)\|_2^3} = \dfrac{\|(h,k)\|_2^4}{\|(h,k)\|_2^3} = \|(h,k)\|_2 \to 0$. Donc ε est continue en $(0,0)$, donc f est différentiable en $(0,0)$ et ce n'est que maintenant que l'on peut affirmer que $D_{(0,0)}f$ est la différentielle de la fonction différentiable f en $(0,0)$.
Le DL_1 de f en $(0,0)$ est alors :

$$f(x,y) = 0 + 0\cdot x + 1\cdot y + \|(x,y)\|\varepsilon(x,y) = y + \|(x,y)\|\varepsilon(x,y).$$

5) Pour le cas de f donnée, il suffit de vérifier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$ car sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ elles ont des expressions du type fraction rationnelle donc elles sont même de classe C^∞ (par "les théorèmes généraux"). En $(0,0)$ on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{2x^3\left(x^2+2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \leqslant \frac{4\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} = 4\|(x,y)\|_2 \to 0$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Le même résultat est valable pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ car :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \left|-\frac{2yx^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} + 1 - 1\right| \leqslant \frac{2\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} = 2\|(x,y]\|_2 \to 0.$$

En conclusion, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

6) Une fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ssi toutes ses dérivées partielles premières existent en chaque point de $\mathbb{R}^2$, et alors, vues comme fonctions à 2 variables, elles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
D'après la question précédente, ceci est précisément notre cas, donc $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
D'après le CM, si une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ alors f est différentiable sur $\mathcal{D}$. Par conséquent, la fonction f de l'énoncé étant C^1 sur $\mathbb{R}^2$, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ce qui re-démontre l'affirmation de la question (5).

CORRIGÉ de l'Exercice 2 :

Observation : f est fonction polynomiale à deux variables donc $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x(y-1)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\left(x^2+y^2-2y\right)$.

2) (a,b) est point critique pour f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.
Pour notre cas, (a,b) est point critique ssi il est solution du système :

$$\begin{cases} 6x(y-1)=0 \\ 3(x^2+y^2-2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{ ou } \ y=1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{ et } \ y(y-2)=0 \\ \text{ou} \\ y=1 \ \text{ et } \ x^2=1 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{C} = \{(0,0);(0,2);(1,1);(-1,1)\}$.

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(y-1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6(y-1)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x$, où on a tenu compte du Théorème de Schwarz vu que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ceci fournit la Hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6(y-1) & 6x \\ 6x & 6(y-1) \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} y-1 & x \\ x & y-1 \end{pmatrix}.$$

4.a) Si I_2 note la matrice unité 2×2, on obtient les Hessiennes au points donnés :

$$H_f(0,2) = 36\cdot I_2 = -H_f(0,0) \ \text{ et } \ H_f(1,1) = 36\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -H_f(-1,1).$$

4.b) Dans le cas de $(0,0)$ et $(0,2)$ les matrices sont déjà diagonales car I_2 l'est.
En $(0,0)$ les valeurs propres de $H_f(0,0)$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -36 < 0$ donc on a en $(0,0)$ un maximum local strict pour f.
De même, en $(0,2)$ les valeurs propres de $H_f(0,2)$ sont $\lambda_1=\lambda_2 = 36 > 0$ donc f admet en $(0,2)$ un minimum local strict.

Pour $(\pm 1,1)$ les matrices $H_f(\pm1,1)$ sont du type $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, celle-ci ayant comme polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \det\left(H_f(\pm1,1) - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2$$

donc ses racines sont $+\alpha$ et $-\alpha$. Dans notre cas $\alpha = \pm 36$ mais ceci n'a pas vraiment d'importance : ce qui compte est que les valeurs propres de $H_f(\pm1,1)$ sont $\neq 0$ et qu'elles sont *de signes contraires* donc en $(\pm1,1)$ on a affaire à des points-selle pour f.

5) Non, f n'admet pas d'extrema globaux car il existent des directions de $\mathbb{R}^2$ le long desquelles f tend soit vers $+\infty$ soit vers $-\infty$. En effet, pour l'application partielle :

$$y \mapsto f(0,y) = y^3 - 3y^2 + 2 \quad \text{on a} \quad \lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \pm\infty.$$