Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2023-2024 (**18.06.2024)**

Fonctions de plusieurs variables – Examen (session 2)
Durée : 1h30

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés

Bien soigner la rédaction. Toute réponse sans justification vaut zéro. Les exercices sont indépendants.

EXERCICE 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} + y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$. Ensuite, justifier pourquoi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Concernant les dérivées partielles premières de f :

2.a) Donner les expressions des applications partielles de f en $(0,0)$, à savoir celles des applications : $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$.

2.b) Montrer que les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ de f en $(0,0)$ existent et donner leur valeur.

2.c) Justifier brièvement pourquoi f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et donner leur expression en un point quelconque (x,y) de cet ensemble.

2.d) Conclure, en donnant les expressions des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tant que fonctions à deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$.

3) Donner, au choix, soit la matrice Jacobienne de f en $(0,0)$ soit l'expression *a priori* de la différentielle de f en $(0,0)$.

4) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ à l'aide de la définition de cette notion. Autrement dit, montrer que f admet un développement limité du premier ordre en $(0,0)$, et donner ce développement.

5) Les fonctions à 2 variables $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ déduites à (2.d) sont-elle continues sur $\mathbb{R}^2$?

6) Rappeler ce que veut dire qu'une fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
A-t-on $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ pour la fonction f de l'énoncé ? Revenir sur la question (4), pour donner une autre justification de l'affirmation contenue dans cette question.

EXERCICE 2 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

1) Calculer ses dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Donner la définition d'un point critique (a,b) de f. Trouver l'ensemble $\mathscr{C}$ des points critiques de f et montrer qu'il a 4 éléments, qu'on spécifiera.

3) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en un quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et en déduire l'expression de la matrice Hessienne $H_f(x,y)$ de f en (x,y).

4) Soit les quatre points de $\mathbb{R}^2$ suivants : $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ et $(-1,1)$.

4.a) Calculer les matrices Hessiennes correspondantes à chacun de ces quatre points.

4.b) Décider pour chacun sa nature : est-il un point d'extremum local de f (préciser alors si c'est un minimum ou un maximum) ou bien est-ce un point-selle de f ?

5) La fonction f a-t-elle des extrema *globaux* sur $\mathbb{R}^2$? (justifier !)