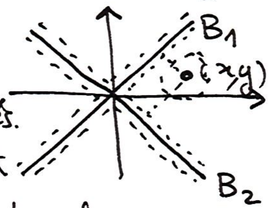
CORRIGÉ de l'EXAMEN de F.P.V. (Session 1) 2023-2024

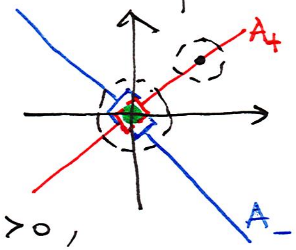
EXERCICE 1 : (1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y^2\}$. Or $x^2 - y^2 = 0$ $\iff (x-y)(x+y) = 0 \iff (x,y) \in B_1 \cup B_2$ où B_1, B_2 sont les bissectrices du plan $\mathbb{R}^2$:



Donc D est formé de l'union des 4 quarts de plan bornés par des pointillés. Chaque quart de plan est un ouvert car $\forall (x,y)$ lui appartenant, la boule ouverte $B((x,y);r)$ avec $r = \frac{1}{2}\min\{\text{dist}((x,y);B_1);\text{dist}((x,y);B_2)\}$ (on a tjrs $2r \geq 0$, $\neq$) est contenue ds ce quart de plan.

Donc $D = \text{dom} f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(2.a) $A_\pm$ ne sont ni des ouverts ni des fermés de $\mathbb{R}^2$.



- Pas ouvert, car toute boule centrée sur un point d'une des demi-droites formant A_+ ou A_- ne se réduisant pas à ce point même, donc ayant un rayon $\varepsilon > 0$, intersecte nécessairement la complémentaire de A_+, et contient ainsi une infinité de points de D.
- Pas fermé, car en centrant une boule de rayon $\varepsilon \gneq 0$ en $(0,0) \notin A_+ \cup A_-$, celle-ci intersecte nécessairement $A_+ \cup A_-$ dans des points du type $(\alpha, \alpha\pm)$ $\forall |\alpha| \leq \varepsilon$. Donc il est faux qu'en tout point de la complémentaire de $A_+ \cup A_-$ on peut centrer une boule qui reste dans cette complémentaire, donc la complémentaire n'étant pas un ouvert, A_+, A_- ne peut être un fermé.

(2.b) Si f était prolongeable par continuité en un pt. $(a, \pm a)$ la limite $\lim_{(x,y)\to(a,\pm a)} f(x,y)$ existerait et serait finie. Or, pour le choix (par ex.) de la suite : $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $x_n = \sqrt{a^2 + \frac{1}{n}}$ et $y_n = \pm a$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x_n,y_n) = \frac{\left(a^2+\frac{1}{n}\right)^2(\pm a)}{\cancel{a^2}+\frac{1}{n}-\cancel{a^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm a^5 \lim_{n\to\infty} n \overset{\text{car } a \neq 0.}{=} \pm\infty.$$

(3) Bien que la situation soit un peu différente, car lorsque $(x,y) \to (0,0)$ le numérator dans l'expression de f s'annulle aussi, la réponse est négative. En effet, choisissons la suite (par ex.) : $x_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ et y_n telle que $y_n^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$f(x_n,y_n) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^4 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{n^2}} = n\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2}{\sqrt{n}} - \frac{n^2}{n^2}} = \sqrt{n^{3/2} - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

EXERCICE 2 : Obs : d'après la définition, f change de comportement entre les zones du plan délimitées par la première bissectrice de celui-ci. Il est donc clair que la continuité doit être testée dans les points du type (a,a), dans les autres points elle était vérifiée grâce aux théorèmes généraux car là f est un polynôme de $d^\circ \leq 2$ en x et y.

Noter que cet argument répond partiellement à la question (1.c), à savoir pour les (x,y) t.q. $x \neq y$.

(1.a) $f(0,0) \overset{def}{=} 0(1-0) = 0$ où nous avons utilisé la première expression, valable pour $x \leqslant y$. Ceci nous exempte de vérifier la continuité pour les (x,y) t.q. $x \leqslant y$ mais vérifions-la pour les (x,y) avec $x > y$: On a $|y| \leq \|(x,y)\|_2$ et $|1-x| \leq 1 + \|(x,y)\|_2$ donc $|y(1-x) - 0| \leq \|(x,y)\|_2 (1 + \|(x,y)\|_2) \to 0(1+0) = 0$.

(1.b) Le même argument que ci-dessus nous permet de vérifier la continuité en (a,a) seulement pour les (x,y) avec $x > y$. On a : $f(a,a) = a(1-a)$,

$$|f(x,y) - f(a,a)| = |y(1-x) - a(1-a)| =$$
$$= |(y-a)(1-x) + a(1-x) - a(1-a)|$$
$$\leq |(y-a)(1-(x-a)) - (y-a)\cdot a| +$$
$$+ |a|\,|1 - x - (1-a)| =$$
$$\leq |y-a|\cdot(1 + |x-a|) + |a|(|y-a| + |x-a|)$$
$$\leq \|(x-a, y-a)\|_2 (1 + \|(x-a, y-a)\|_2) +$$
$$+ 2|a|\,\|(x-a, y-a)\|_2$$
$$\to 0(1+0) + 2|a|\cdot 0 = 0.$$

(1.c) Par ce qui a été dit au début (f polynomiale en dehors de la 1ère bissectrice) f est continue en chaque pt $(x,y) \neq (a,a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ et par (1.a-b) elle est continue sur la 1ère bissectrice.
Donc f est continue partout sur $\mathbb{R}^2$.

(2.a) et (2.b)
$$f(x,a) = \begin{cases} x(1-a) & \text{si } x \leq a \\ a(1-x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to a- \\ \neq}} \frac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a- \\ \neq}} \frac{x(1-a) - a(1-a)}{x-a} = 1-a$$

$$\lim_{\substack{x \to a+ \\ \neq}} \frac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a+ \\ \neq}} \frac{a(1-x) - a(1-a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{\substack{x \to a+ \\ \neq}} a\frac{\cancel{1} - x - \cancel{1} + a}{x-a} = -a$$

$f(\cdot,a)$ ssi la dérivée à droite et à gauche existent (c'est le cas !) et sont égales. Or
$1 - \cancel{a} = -\cancel{a} \iff 1 = 0$ impossible.

Donc $f(\cdot,a)$ n'est pas dérivable en a donc $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(a,a)$.

Un calcul analogue (dû à la symétrie) montre que $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(a,a)$. En effet,
$$f(a,\cdot) = \begin{cases} a(1-y) & \text{si } a \leq y \\ y(1-a) & \text{si } a < y \end{cases}$$

(2.c) Nous sommes ds. le cas d'une fonction continue partout mais qui n'admet pas des dérivées partielles en aucun des points de la 1ère bissectrice, donc elle ne peut être différentiable en ces points. Donc a priori elle ne peut être differentiable que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,a) \mid \forall a \in \mathbb{R}\}$ et elle l'est car polynômiale sur cet ensemble (et $\hat{m}$ elle est C^∞ !)

(3) Le pt. $(1,-1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,a) \mid \forall a \in \mathbb{R}\}$ donc elle est de classe C^∞ dans un voisinage de ce pt. On a : $f(1,-1) = 0$. Aussi, comme autour de $(1,-1)$ on a $f(x,y) = y(1-x) = y - xy$, on a :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - x$ donc

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -(-1) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 1 - 1 = 0$.

Donc le DL1 de f en $(1,-1)$ est :

$$f(x,y) = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\cdot(y+1) + \|(x-1,y+1)\|_2\,\varepsilon(x-1,y+1)$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est t.q. $\varepsilon(h,k) \to 0$ quand $(h,k) \to (0,0)$

donc

$$f(x,y) = 0 + 1\cdot(x-1) + 0\cdot(y+1) + o(\|(x-1,y+1)\|_2)$$
$$= (x-1) + o(\|(x-1,y+1)\|_2)$$

EXERCICE 3 : $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$ car fonct. polynomiale.

(1) (x,y) point critique pour f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont nulles en (x,y). Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = y \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^8 - 1) = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pm 1 \\ y = x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \\ x = \pm 1 \text{ et } y = \pm 1. \end{cases}$$

Donc f admet 3 pts. critiques : $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 12x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4$

Donc $H_f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix}$.

(3.a) $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det(H_f(0,0) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4^2$

(3.b.) donc $\lambda_\pm = \pm 4$ sont les v.p.

donc $(0,0)$ est point-selle pour f.

(3.c) On a en général (i.e. ds. un pt $(a,b) \in \mathrm{dom} f$) le **DL** 2 :

$$f(x,y) = f(a,b) + \det\left(J_f(a,b) \times \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\det(x-a, y-b) H_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + o(\|(x-a,y-b)\|_2^2)$$

Pour $(a,b) = (0,0)$: (puisque $f(0,0) = 0$)

$$f(x,y) = f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right) + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$= -4xy + o(\|(x,y)\|_2^2).$$

(3.d) La fonction f étant polynomiale, son expression est son propre DL en $(0,0)$. De (3.c) on voit que le terme d'ordre 2 de son **DL** est $-4xy$ donc en comparant avec $f(x,y) := -4xy + x^4 + y^4$ on déduit que le terme d'ordre 3 est nul et celui d'ordre 4 vaut $x^4 + y^4$.

4.a **4.b** $H_f(\pm 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}$

$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)(4-\lambda)$

donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$ et étant > 0 les deux, on déduit que ds les 2 pts $(\pm 1, \pm 1)$ f atteint des ~~minimums~~ minimum locaux.

4.c $f(1,1) = 2 - 4 = -2$ donc en $(1,1)$ on a :

$$f(x,y) = f(1,1) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J_f(1,1) \text{ car pt crit.}} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{4}{2}(x-1, y-1)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|(x-1, y-1)\|_2^2)$$

$$= -2 + 6(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2 + o(\ldots)$$

4.d Comme f est polynomiale, son expression ~~donne~~ automatiquement son DL. MAIS... ici on nous demande le DL en $(1,1)$ donc il faudra "travailler à la main" l'expression $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ afin de la mettre en termes de variables $x-1$ et $y-1$:

$f(x,y) = (x-1+1)^4 + (y-1+1)^4 - 4(x-1+1)(y-1+1)$ et en notant $x - 1 = X$, $y - 1 = Y$ on a :

$$= (X+1)^4 + (Y+1)^4 - 4(X+1)(Y+1) =$$

$$= X^4 + Y^4 + 4(X^3 + Y^3) + 6(X^2 + Y^2) \cancel{+4(X+Y)} + 2 - 4XY - \cancel{4(X+Y)} - 4$$

$$= -2 + 2(3X^2 - 2XY + 3Y^2) + 4(X^3 + Y^3) + X^4 + Y^4$$

Donc en comparant avec ce qu'on a obtenu à (4.c) on voit que les termes du "reste" ds le DL2 en $(1,1)$ sont précisément : $4((x-1)^3 + (y-1)^3) + (x-1)^4 + (y-1)^4$.

5 L'idée (l'intuition) est que dans l'expression $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ le terme $x^4 + y^4$ l'emporte à l'infini (ds. le sens : quand $\|(x,y)\|_2 \to \infty$) sur le $-4xy$ donc on n'aura pas de "surprises" donnée par l'éloignement de l'origine, à savoir il existe une boule ouverte (de rayon $r < \infty$) en dehors de laquelle les valeurs de $f(x,y)$ ne sont pas négative.

Donc on est partis pour montrer que les pts de min $(\pm 1, \pm 1)$ qu'on avait trouvés et qui étaient des min locaux stricts de f, sont aussi des min globaux pour f. En effet :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}y) =$$

$$= \left(x^4 - (\sqrt{2}x)^2\right) + \left(y^4 - (\sqrt{2}y)^2\right) + (\sqrt{2}x)^2 - 2(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}y) + (\sqrt{2}y)^2$$

$$= (x^4 - 2x^2) + (y^4 - 2y^2) + 2(x-y)^2$$

Alors en demandant $x^2 \geq 2$ on a $x^4 - 2x^2 \geq 0$ et de m̂ pour y.

Donc si $x^2 + y^2 \geq 4 \Leftrightarrow (x,y) \notin B((0,0); 2)$, on a $f(x,y) \geq 0 \gneq -2 = f(\pm 1, \pm 1)$, ce qui est suffisant pour m.q. $(\pm 1, \pm 1)$ sont des pt. de min globaux pour f.

EXERCICE 4 :

1.a $\displaystyle\int \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx = \int 2y\cdot x\,dx + y^2\int dx$

$\Leftrightarrow \exists c : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^1 t.q.

$g(x,y) = \cancel{2}y\frac{x^2}{\cancel{2}} + y^2x + c(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

1.b En remplaçant ceci ds. la 2ème équation on a :

$\frac{\partial}{\partial y}\left(yx^2 + y^2x + c(y)\right) = x^2 + 2xy$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{2xy} + c'(y) = \cancel{x^2} + \cancel{2xy}$

$\Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

(donc c est une fonction cte $= \lambda$).

1.c En ajoutant l'hypothèse $g(1,1) = 3$ à

$g(x,y) = yx^2 + y^2x + \lambda$, on obtient

$1\cdot 1^2 + 1^2\cdot 1 + \lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Donc l'unique g qui vérifie $(*)$ et $g(1,1) = 3$ est :

$\underline{g(x,y) = xy^2 + x^2y + 1}$

2.a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y\frac{d(x^2)}{dx} = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x^2$

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = y^2$

$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2xy$

$J_u(x,y) + J_v(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy \end{pmatrix}$

2.b Par déf. $J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \overset{(*)}{=}$

$= \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy \end{pmatrix} \underset{2.a}{=} J_u(x,y) + J_v(x,y)$.

2.c Par (2.b) on a déduit que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$

donc $g(x,y) = (u+v)(x,y) + \mu$ où μ est une constante réelle (si c'était une fonction en y, resp. en x, on n'aurait que l'une des éq ci-dessus valable, l'autre aurait dû avoir μ' dedans).

Ensuite, puisque $(u+v)(x,y) = x^2y + xy^2$ en imposant $g(1,1) = 3$ ceci nous donne $\mu = 1$ (comme à (1.c)) et on retrouve pour g la m̃ expression de (1.c)

3.a h n'est pas une application linéaire mais elle est tte de même simple à travailler. Remarquer que, vue comme application : $\mathbb{R}^2$ elle ne pourrait être bijective. Elle l'est, mais sur le quart de plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'elle admet une réciproque h^{-1} ! On a :

$\begin{cases} u = x^2y \\ v = xy^2 \end{cases} \underset{\text{donc } u \neq 0}{\overset{x,y \neq 0}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} y = \frac{u}{x^2} \\ v = x\cdot\frac{u^2}{x^4} = \frac{u^2}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{u^2}{v} \\ y = \frac{u}{x^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}} \text{ ou } x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ (encore 2 rac. complexes)} \\ y = u\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^4}} = \sqrt[3]{\frac{u^3v^2}{u^4}} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} \end{cases}$

Donc on a :

$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \ni (u,v) \xmapsto{h^{-1}} h^{-1}(u,v) = \left(\sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}, \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}\right)$.

3.b $J_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$; $J_{h^{-1}}(u,v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[3]{uv}} & -\sqrt[3]{\left(\frac{u}{v^2}\right)^2} \\ -\sqrt[3]{\left(\frac{v}{u^2}\right)^2} & \frac{2}{\sqrt[3]{uv}} \end{pmatrix}$

La vérification demandée est plus simple si on tient compte du fait que $h(x,y) = (u,v)$ où $u(x,y) = x^2y$ et $v(x,y) = xy^2$.

On a ainsi :

$$J_{h^{-1}}(h(x,y)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{xy} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2}{xy} \end{pmatrix}$$

donc

$$J_h(x,y) \times J_{h^{-1}}(h(x,y)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{xy} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2}{xy} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-1 & \cancel{-\frac{2x}{y}} + \cancel{\frac{2x}{y}} \\ \cancel{+\frac{2x}{y}} \cancel{-\frac{2x}{y}} & 4-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

3.c

4 $J_{g\circ h^{-1}}(u,v) = J_g(x,y) \times J_{h^{-1}}(u,v)$ conséq. de (*) de (3.c)

Or $J_{g\circ h^{-1}}(h(x,y))$ est le m. de gauche ci-dessus donc on exprimera $J_{h^{-1}}(u,v)$ comme $J_{h^{-1}}(h(x,y))$ (voir ci-dessus) et on a :

$$J_{g\circ h^{-1}}(h(x,y)) = \begin{pmatrix} 2xy+y^2 & x^2+2xy \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{xy} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2}{xy} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 + \cancel{\frac{2y}{x}} - 1 - \cancel{\frac{2y}{x}} & \cancel{-\frac{2x}{y}} - 1 + \cancel{\frac{2x}{y}} + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.c On a pour deux fonctions C^1 :

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[\phi]{} \mathbb{R}^m \xrightarrow[\psi]{} \mathbb{R}^p$$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $J_{\psi\circ\phi}(\vec{x}) = J_\psi(\phi(\vec{x})) \times J_\phi(\vec{x})$ (*)

Or, dans notre cas $n = m = p = 2$ et si on prend $\phi = h$ et $\psi = h^{-1}$ on a :

$$\mathbb{R}^2 \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad h^{-1}\circ h = Id \text{ par déf. de la réciproque}$$

Donc en gardant en $\mathbb{R}^2$ la même base (canonique) et compte tenu que Id est linéaire : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on a $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$: $D_{\vec{a}}(Id) = Id$ dont la matrice ds la base canonique est $\mathbb{I}_2$. On a donc $J_{Id}(\vec{a}) = \mathbb{I}_2$ $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$ et par (*) appliqué à notre cas : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{I}_2 = J_{Id}(x,y) = J_{h^{-1}}(h(x,y)) \times J_h(x,y)$$