Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2023-2024 (**21.12.2023)**

Fonctions de plusieurs variables - CC 3 (examen session 1)

Durée : 2h

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction : toute réponse sans justification vaut zéro

EXERCICE 1 : Soit $f(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^2 - y^2}$.

1. Donner $D \subseteq \mathbb{R}^2$, le domaine de définition de f.
D est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$, un fermé ou ni l'un ni l'autre ? (justification requise !)

2. Soient les deux ensembles $A_\pm = \{(a, \pm a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

2.a) Représenter $A_\pm$ dans le plan xOy et décider de leur nature topologique en $\mathbb{R}^2$ (i.e. ouvert, fermé ou ni l'un ni l'autre ?).

2.b) Montrer que f n'est prolongeable par continuité en aucun des points de $A_+ \cup A_-$.

3. Décider de l'existence de la limite de f en $(0,0)$: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq \pm y}} \frac{x^4 y}{x^2-y^2}$. Puis conclure : peut-on prolonger f par continuité en dehors de son domaine de définition D ?

EXERCICE 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}$.

1. On veut étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$:

1.a) Étudier la continuité de f en $(0,0)$.

1.b) Étudier la continuité de f en un point du type (a,a) où $a \neq 0$.

1.c) Sur quel ensemble C de $\mathbb{R}^2$, f est-elle continue ? (justifier)

2. On veut étudier la différentiabilité de f :

2.a) Écrire les expressions des applications partielles de f en (a,a) pour $a \in \mathbb{R}$, à savoir les fonctions à une variable réelle $x \mapsto f(x,a)$ et $y \mapsto f(a,y)$.

2.b) Étudier la dérivabilité de ces applications partielles, autrement dit, l'existence des dérivées partielles premières de f en (a,a).

2.c) Sur quel ensemble D de $\mathbb{R}^2$, f est-elle différentiable ? (justifier)

3. Donner le DL1 (développement limité à l'ordre 1) de f en $(1,-1)$.

EXERCICE 3 : Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ on se propose de faire une étude de ses extrema sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet des points critiques, que l'on précisera.

2. Calculer la matrice hessienne $\mathrm{H}_f(x,y)$ de f en un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Concernant le point $(x,y) = (0,0)$:

3.a) Calculer la matrice hessienne $\mathrm{H}_f(0,0)$, donner son polynôme caractéristique.

3.b) En déduire les valeurs propres de $\mathrm{H}_f(0,0)$ et établir la nature du point $(0,0)$.

3.c) Donner le DL2 (développement limité à l'ordre 2) de f en $(0,0)$ en mettant en évidence les matrices jacobienne $\mathrm{J}_f(0,0)$ et hessienne $\mathrm{H}_f(0,0)$ de f en ce point.

3.d) Que valent les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 de ce DL2 de f en $(0,0)$?

Tourner la page s.v.p. —>

4) Concernant les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$:

4.a) Calculer les matrices hessiennes $\mathrm{H}_f(\pm 1, \pm 1)$.

4.b) En déduire les valeurs propres des matrices $\mathrm{H}_f(\pm 1, \pm 1)$ et établir la nature des points $(\pm 1, \pm 1)$.

4.c) Donner le DL2 (développement limité à l'ordre 2) de f en $(1,1)$ en mettant en évidence les matrices jacobienne $\mathrm{J}_f(1,1)$ et hessienne $\mathrm{H}_f(1,1)$ de f en ce point.

4.d) (BONUS) En s'inspirant de ce qu'on aurait pu constater à la question (3.d) donner une méthode de calcul exact des termes d'ordre supérieur ou égal à 3 du DL2 de f en $(1,1)$.

5) f admet-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les préciser (justifier la réponse).

EXERCICE 4 : Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $g(1,1) = 3$ et

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy. \tag{$*$}$$

Soit $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'application de classe C^1 définie $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) := (x^2 y, xy^2). \tag{$**$}$$

1. On se propose de trouver la fonction g en résolvant le système d'équations $(*)$:

1.a) Intégrer la première équation de $(*)$.

1.b) Remplacer en la deuxième équation de $(*)$ le résultat obtenu à (1.a) et en déduire une équation différentielle vérifiée par une fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inconnue, qu'on résoudra.

1.c) Conclure, en déduisant l'expression de l'unique g qui vérifie $g(1,1) = 3$.

2. Trouvons à présent g par un autre moyen :

2.a) Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et à y des fonctions à deux variables u et v définies dans $(**)$.
Écrire les matrices jacobiennes correspondantes et calculer $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, leur somme $\mathrm{J}_u(x,y) + \mathrm{J}_v(x,y)$.
(ou, alternativement, donner la somme des différentielles $\mathrm{D}_{(x,y)}u + \mathrm{D}_{(x,y)}v$).

2.b) En déduire de $(*)$ la liaison entre ces sommes et la matrice jacobienne $\mathrm{J}_g(x,y)$ de g (ou bien, avec la différentielle $\mathrm{D}_{(x,y)}g$ respectivement)

2.c) En déduire ensuite une relation reliant les fonctions g, u et v et conclure sur la formule exacte de g qui vérifie la condition initiale $g(1,1) = 3$.

3. (BONUS) On s'occupe à présent de la fonction h définie à $(**)$:

3.a) Montrer que h est bijective en trouvant explicitement sa réciproque h^{-1}.

3.b) Calculer les matrices jacobiennes $\mathrm{J}_h(x,y)$ et $\mathrm{J}_{h^{-1}}(u,v)$ et vérifier par un calcul direct que $\mathrm{J}_h(x,y) \times \mathrm{J}_{h^{-1}}(h(x,y)) = \mathbb{I}_2$, où $\mathbb{I}_2$ est la matrice identité 2×2.

3.c) Justifier pourquoi la relation établie à la question précédente est juste un cas particulier d'un résultat théorique (que l'on citera en sa généralité).

4. (BONUS) Calculer $\mathrm{J}_{g \circ h^{-1}}(h(x,y))$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.