# CORRIGÉ de l'Examen de FPV 2022-2023

## SESSION 1 : 05.01.2023

### EXERCICE 1 :

① $|f(x,y)-f(0,0)| = |x^2-y^2|\overbrace{\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}^{\leq 1} \leq \|(x,y)\|_2^2 \to 0$

donc f est continue en $(0,0)$ et en tout $(x,y)\neq(0,0)$ elle l'est aussi par les thm. généraux de continuité sur la somme, produit, composées de fonct. cont.

② $f(x,0)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ ; $f(0,y)=\begin{cases} -y^2\sin\left(\frac{1}{y^2}\right), & y\neq 0\\ 0 & , y=0\end{cases}$

③ $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{\text{déf}}{=} \frac{df(\cdot,0)}{dx}(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{x^{\cancel{2}}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-0}{\cancel{x-0}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{déf}}{=} \frac{df(0,\cdot)}{dy}(0) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ \neq}} \frac{-y^{\cancel{2}}\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)-0}{\cancel{y-0}} = 0\end{array}\right\}$ car "sin" est bornée

④ Si $(x,y)\neq(0,0)$ on dérive partiellement par rapp à $x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2-y^2)\left[\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

⑥ On pourrait par exemple passer en coordonnées polaires pour avoir une idée du contre-exemple que nous pourrions donner. On a alors, si $r\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 2r\cos\theta\sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{\cancel{r^2}\cos(2\theta)\cdot 2\cancel{r}\cos\theta}{r^4}\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Or, comme "cos" et "sin" sont des fonctions bornées, le premier terme du m. de droite ci-dessus tend à 0 quand $r\to 0$ et il apparaît évident que le deuxième terme, ayant $r$ au dénominateur, ne va pas tendre à 0 quand $r\to 0$ pour des valeurs de $\theta$ bien choisies. Plus précisément, on voudrait le minorer par une quantité qui tend à $+\infty$ quand $r\to 0$. Choisissons par ex. $\theta=\frac{\pi}{3}$ car alors $\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\cos(2\theta)=-\frac{1}{2}$ ce qui est idéal pour changer le signe de ce terme en vue d'une minoration par une quantité positive $\to+\infty$. Pour ce choix, on doit choisir aussi une suite de $r_n$ t.q. $\cos\left(\frac{1}{r_n^2}\right)$ reste une quantité positive facilement calculable. Par ex. $\frac{1}{r_n^2}=2\pi n$ donnerait $\cos\left(\frac{1}{r_n^2}\right)=1$ et $\sin\left(\frac{1}{r_n^2}\right)=0$ ce qui nous arrange, car ça fait disparaître le premier terme. En conclusion: Soit $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n=\frac{1}{2\sqrt{2\pi n}}$, $y_n=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi n}}$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = 0 - \sqrt{2\pi n}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\cancel{2}\underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

alors que $(x_n,y_n)\longrightarrow(0,0)$ quand $n\to\infty$, ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Ceci veut dire que f ne peut être de classe $C^1$ en aucun voisinage de $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

⑤ Si f était différentiable en $(0,0)$ on aurait : $\exists\,\varepsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x,y)\to 0$ quand $(x,y)\to(0,0)$ t.q.

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0}\cdot x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0}\cdot y + \|(x,y)\|\,\varepsilon(x,y).$$

$\longleftrightarrow$ va à la question (3)

Ainsi, f est diff. en $(0,0)$ ssi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0$. Or,

$$\left|\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2}-0\right| = \frac{|x^2-y^2|}{\|(x,y)\|_2}\left|\sin\left(\frac{1}{\|(x,y)\|_2^2}\right)\right| \leq$$
$$\leq \frac{\|(x,y)\|_2^{\cancel{2}}}{\cancel{\|(x,y)\|_2}}\cdot 1 \longrightarrow 0 \text{ quand } (x,y)\to(0,0).$$

---

## EXERCICE 2 :

(1.a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=0\\ -x+2y=0\end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$

Donc $(0,0)$ est l'unique pt. critique de $g$.

(1.b) $H_{(0,0)}(g) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

donc le polynôme caractéristique est :

$$P_\lambda = \det\left(H_{(0,0)}(g)-\lambda \mathbb{I}_2\right) = \begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2-1 =$$
$$= (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

Ses racines sont $\lambda=1$ et $\lambda=3$ les deux strictement positives $\Rightarrow$ $(0,0)$ est un point minimum strict

(1.c) $g(x,y) = x^2+y^2-xy = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\left(\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^2-2\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)^2\right)$
$$= \left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt2}-\frac{y}{\sqrt2}\right)^2$$

Donc $g(x,y)\geq 0$ et $=0$ ssi $x=0$ et $y=0$ et $x=y$ i.e. ssi $(x,y)=(0,0)$.

Alternativement, le passage en coord. polaires donne
$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2(1-\cos\theta\sin\theta) = \frac{r^2}{2}(2-\sin(2\theta)) \geq \frac{r^2}{2}$
donc $\geq 0$ $\forall\theta$ et $=0$ ssi $r=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

---

Conclusion : 1. $g$ n'a pas de max global car $g(x,x)=x^2$ et $\lim_{x\to\infty} g(x,x)=+\infty$

2. $(0,0)$ est min global (unique) pour $g$, car $g(0,0)=0$ et $g(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

② $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4\left((x-y)-x^3\right)$ ; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\left((x-y)+y^3\right)$

③ On doit résoudre : $(S) = \begin{cases}(x-y)-x^3=0\\ -(x-y)-y^3=0.\end{cases}$

$\underset{\text{Pivot}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x-y-x^3=0 \quad (*)\\ x^3+y^3=0 \quad (**)\end{cases}$

Or $x^3+y^3=0 \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+\cancel{x}y^2)=0$
$\Leftrightarrow x=-y$ <u>ou</u> $x^2-xy+y^2=0$
$\underset{\text{Quest.(1)}}{\Leftrightarrow} x=-y$ <u>ou</u> $x=y=0$

Maintenant on remplace chacune de ces 2 variantes dans $(*)$ :

si $x=-y$ alors $(*) \Leftrightarrow 2x-x^3=0 \Leftrightarrow x(2-x^2)=0$
$\Leftrightarrow x\in\{0,\pm\sqrt2\} \Rightarrow y=-x$ peut être $y=0$ resp. $y=\mp\sqrt2$

si $x=y=0$ alors $(*)$ est vérifiée.

Conclusion : $(x,y)$ vérifie $(S)$ ssi $(x,y)\in\{(0,0);(\sqrt2,-\sqrt2);(-\sqrt2,\sqrt2)\}$

<u>Variante</u> : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+y^3=0 \quad (**)\\ 2(x-y)-(x^3-y^3)=0 \quad (\overset{*}{**})\end{cases}$

Or $(\overset{*}{**}) \Leftrightarrow (x-y)(2-x^2-xy-y^2)=0$, donc

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=0 \text{ ou } x^2-xy+\cancel{x}y^2=0\\ x-y=0 \text{ ou } x^2+xy+y^2=2\end{cases}$

…et l'étude de tous les cas résultants donne le m̃ résultat (je sais, car je l'ai fait et je vous invite à le faire)

④ On a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(1-3x^2)$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4(1-3y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4(-1+0) = -4$, d'où

$$H_{(x,y)} f = 4\begin{pmatrix} 1-3x^2 & -1 \\ -1 & 1-3y^2 \end{pmatrix}.$$

⑤ si $(x,y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ on a :

$\frac{1}{4} H_{(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})} f = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est : $P_\lambda = \text{dét}\begin{pmatrix} -5-\lambda & -1 \\ -1 & -5-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \left((5+\lambda)^2 - 1\right) = (4+\lambda)(6+\lambda)$

Donc les v.p. de la hessienne pour les 2 pts critiques $\underline{(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})}$ sont $(-4)\times 4 = -16$ et $(-6)\times 4 = -24$ donc ces pts sont des <u>maxima stricts (locaux)</u> de f.

(6.a) En (0,0) on a : $\frac{1}{4} H_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont son

$P_\lambda = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \underbrace{(1-\lambda-1)}_{-\lambda}\underbrace{(1+\lambda+1)}_{2-\lambda}$

donc les v.p. sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2\times 4 = 8$, et comme une des v.p. est nulle on ne peut pas décider sur la nature du pt. (0,0).

(6.b) On observe que si $x = y$ : $f(x,x) = -2x^4 \leq 0$ et si $x = -y$ alors $f(-x,x) = 8x^2 - 2x^4 = 2x^2(4-x^2) \geq 0$ dans un voisinage de (0,0).

Or $0 = f(0,0)$ donc en proposant les suites $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ on montre que pour $n \to \infty$ on a :

$f(x_n, y_n) \geq 0 = f(0,0) \geq f(x'_n, y'_n)$ ce qui prouve que f change de signe autour de (0,0). donc (0,0) n'est pas point extremum de f donc c'est un pt. selle.

(7.a) $f(n,n) = 2\cdot 0^2 - 2n^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ donc pas de minimum global

(7.b) $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 2(2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})^4 = 8$

Tel que la question est formulée, il suffit de vérifier que l'identité donnée équivaut à $f(x,y) \leq 8$ ce qui fait des points $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ des pts de <u>max global</u> pour f.

Au lieu de la vérifier, montrons-la directement :

$f(x,y) \leq 8 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4)$
$+ (4x^2 - 2x^2) + (4y^2 - 2y^2) + 4xy \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 \geq 0$

Vrai $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**EXERCICE 3** : (1.a) On a les applications partielles $x_1 \mapsto \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ et $x_2 \mapsto \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ qu'on dérive comme des fonct à 1 variable :

$$\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \left(\frac{d\sqrt{(\cdot)^2+x_2^2}}{dx_1}\right)(x_1) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{2(\cdot)}{\sqrt{(\cdot)^2+x_2}}\right)(x_1)$$

D'où $\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{x_1}{\|(x_1,x_2)\|}$ et de m̂ : $\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{x_2}{\|(x_1,x_2)\|}$

(on comprend alors pourquoi on exclut le $(x_1,x_2)=(0,0)$)

(1.b) On a :

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \arrow[r, "\|\cdot\|"] & \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "\frac{1}{(\cdot)}"] & \mathbb{R}_+^* \\ (x_1,x_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \|(x_1,x_2)\| \arrow[r] & \frac{1}{\|(x_1,x_2)\|}\end{tikzcd}$$

Si $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{(\cdot)}\right)'(\|(x_1,x_2)\|)\cdot\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial x_1}(x_1,x_2) =$$

$$= \left(-\frac{1}{(\cdot)^2}\right)(\|(x_1,x_2)\|)\cdot\underbrace{\frac{x_1}{\|(x_1,x_2)\|}}_{\text{cf. (1.a)}}$$

$$= -\frac{x_1}{\|(x_1,x_2)\|^3}$$

et de même : $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -\frac{x_2}{\|(x_1,x_2)\|^3}$

(1.c) Simple généralisation des résultats obtenus à (1.a) et (1.b) pour le cas des n variables : $\forall j=1,\dots,n$ :

$$\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{x_j}{\|\vec{x}\|} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{\|\cdot\|}\right)}{\partial x_j} = -\frac{x_j}{\|\vec{x}\|^3}$$

(1.d)

$$\frac{\partial^2\|\cdot\|}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial x_j}\right)(\vec{x}) \overset{(1.c)}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\pi_j}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x}) =$$

$$= \frac{\partial \pi_j}{\partial x_j}(\vec{x})\cdot\left(\frac{1}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x}) + \pi_j(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x})$$

$$\overset{(1.c)}{=} 1\cdot\frac{1}{\|\vec{x}\|} + x_j\left(-\frac{x_j}{\|\vec{x}\|^3}\right) = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\left(1-\frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^2}\right)$$

(2a) On a :

$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\} \arrow[r, "\|\cdot\|"] & \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \vec{x} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \|\vec{x}\| \arrow[r] & f(\|\vec{x}\|) =: F(\vec{x})\end{tikzcd}$$

On peut le formuler cette fois-ci en termes de matrices jacobiennes (histoire de changer par rapp. aux calculs faits à (1))

$$J_{\vec{x}}(F) = J_{\|\vec{x}\|}f \cdot J_{\vec{x}}\|\cdot\| = f'(\|\vec{x}\|)\left(\frac{\partial\|\cdot\|}{\partial x_1}(\vec{x}) \dots \frac{\partial\|\cdot\|}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$$

$$\overset{(1.c)}{=} \left(f'(\|\vec{x}\|)\frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \ \dots \ f'(\|\vec{x}\|)\frac{x_n}{\|\vec{x}\|}\right)$$

d'où $\frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}) = f'(\|\vec{x}\|)\frac{x_j}{\|\vec{x}\|}$ , $j=1,\dots,n$

(2.b)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f'(\|\cdot\|)\frac{\pi_j}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x}) =$$

VARIANTE ①

$$= \frac{\partial(f'\circ\|\cdot\|)}{\partial x_j}(\vec{x})\left(\frac{\pi_j}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x}) + \frac{\partial \pi_j}{\partial x_j}(\vec{x})\left(\frac{f'(\|\cdot\|)}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x}) +$$

$$+ \left(f'(\|\cdot\|)\pi_j\right)(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x})$$

$$\overset{(1.c)}{\underset{(2.b)}{=}} f''(\|\vec{x}\|)\frac{x_j}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{x_j}{\|\vec{x}\|} + 1\cdot\frac{f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|} +$$

$$+ f'(\|\vec{x}\|)x_j\cdot\left(-\frac{x_j}{\|\vec{x}\|^3}\right) =$$

Donc $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \dfrac{f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}\left(1 - \dfrac{x_j^2}{\|\vec{x}\|}\right) + f''(\|\vec{x}\|)\dfrac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^2}$.

(2.c) $\Delta F = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \dfrac{f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}\left(\sum_{j=1}^{n} 1 - \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\|\vec{x}\|^2}\right)$

$$+ \frac{f''(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$\sum_{j=1}^{n} 1 = n$

$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|\vec{x}\|^2$

$$\downarrow\; = \frac{f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}\left(n - \cancel{\frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2}}\right) + \frac{f''(\|\vec{x}\|)}{\cancel{\|\vec{x}\|^2}}\cdot\cancel{\|\vec{x}\|^2}$$

d'où le résultat.

③ Pour le cas $n = 1$ la formule donne (sachant que la norme $\|\vec{x}\|$ devient $|x|$ pour $n = 1$) :

$$\Delta F(x) = 0 + f''(|x|) \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

Par ailleurs, la fonction $F(x) = f(|x|), \forall x \neq 0$ s'écrit : $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Donc, sachant que $\Delta F = F''$ (vu qu'il n'y a qu'une seule variable), on a :

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x > 0 \\ -f'(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$F''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{si } x > 0 \\ \underbrace{-(-f''(-x))}_{\to\, = f''(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases} = f''(|x|) \quad \forall x \neq 0.$$

→ **Obs** : On aurait pu donner une autre variante de calcul pour $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}$, qui utilise (1.d).

En effet, on a vu que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f'(\|\cdot\|)\cdot\frac{\pi_j}{\|\cdot\|}\right)(\vec{x}).$$

Or $\dfrac{\pi_j}{\|\cdot\|} \underset{(1.c)}{=} \dfrac{\partial\|\cdot\|}{\partial x_j}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial(f'\circ\|\cdot\|)}{\partial x_j}\cdot\frac{\pi_j}{\|\cdot\|} + f'(\|\cdot\|)\cdot\frac{\partial^2\|\cdot\|}{\partial x_j^2}\right)(\vec{x})$$

Pour le premier terme on utilise le m̂ type de formule que celle qui donne $\dfrac{\partial(f\circ\|\cdot\|)}{\partial x_j}$ à (2.a) mais on remplace $f$ par $f'$.

Pour le 2ème terme, on utilise (1.d) pour $\dfrac{\partial^2\|\cdot\|}{\partial x_j^2}$.

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \left((f')'(\|\vec{x}\|)\cdot\frac{x_j}{\|\vec{x}\|}\right)\cdot\frac{x_j}{\|\vec{x}\|} +$$

$$+ f'(\|\cdot\|)\left(1 - \frac{x_j^2}{\|x\|^2}\right)\cdot\frac{1}{\|\vec{x}\|}$$

d'où le résultat.