Fonctions de plusieurs variables - Examen (session 1)

Durée : 2h30

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction : toute réponse sans justification vaut zéro

EXERCICE 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Écrire les expressions des applications partielles de f en $(0,0)$, à savoir les fonctions à une veriable réelle $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$.

3. En déduire les valeurs des $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, dérivées partielles de f en $(0,0)$.

4. Calculer l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en un point quelconque $(x,y) \neq (0,0)$ et, en utilisant la question (3), donner l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction à 2 variables.

5. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? (Indication : on pourrait montrer que f admet un DL1 en $(0,0)$)

6⋆ (Question BONUS) En étudiant la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(0,0)$, montrer que f ne peut être de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2 : Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$ on se propose de faire une étude de ses extrema.

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

1.a) Trouver le(s) point(s) critique(s) de g.

1.b) Calculer la matrice hessienne de g en ce(s) point(s) critique(s) et conclure en indiquant si g admet des extrema locaux (stricts ?) ou des points selle sur $\mathbb{R}^2$.

1.c) Montrer par calcul direct que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - xy + y^2 \geqslant 0$ et qu'on a égalité ssi $x = y = 0$. En déduit-on que g a des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Préciser.

2. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. En déduire que les <u>*seuls*</u> points critiques de f sont $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(0,0)$. (Indication : lors du calcul, on pourrait utiliser les conclusions de la question 1.)

4. Calculer $H_f(x,y)$, la matrice hessienne de f, en un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Pour les points critiques $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$: calculer la matrice hessienne leur correspondant, préciser ses valeurs propres et décider de la nature de chacun de ces points : est-ce un maximum ou un minimum local, ou bien s'agit-il de point(s) selle ?

6. Concernant le point critique $(0,0)$:

6.a) Calculer la matrice hessienne lui correspondant et trouver ses valeurs propres. Peut-on en déduire la nature (extremum ou point-selle) du point critique $(0,0)$?

Tourner la page s.v.p. —>

6.b) Trouver deux suites $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{(x'_n, y'_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tendent à $(0,0)$ quand $n \to \infty$, convenablement choisies de sorte que l'on montre que la fonction f change de signe dans n'importe quel voisinage ouvert de $(0,0)$.
Conclure sur la nature de $(0,0)$ en tant que possible point d'extremum de f.

7. Concernant les éventuels extrema *globaux* de f (répondre à chaque fois en argumentant et/ou en calculant les valeurs extremes de f si c'est le cas) :

7.a) Y'a-t-il un/des points minimum global/globaux sur $\mathbb{R}^2$ pour f ?

7.b) Montrer que $8 - f(x,y) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2$. Peut-on en déduire si f admet un/des points maximum global/globaux sur $\mathbb{R}^2$? Préciser.

EXERCICE 3 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, notons par $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ (et par $\mathbf{0}$ le vecteur nul, origine de $\mathbb{R}^n$). Notons par $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

1. Soit $\|\bullet\| : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}_+^*$ la restriction de la norme euclidienne $\|\bullet\|_2$; à savoir, $\|\bullet\|$ est l'application définie $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ par $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

1.a) Pour le cas $n = 2$, calculer, dans un $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$, les deux dérivées partielles premières de la fonction $\|\bullet\|$.

1.b) En déduire les dérivées partielles premières de la fonction composée $g = \dfrac{1}{\|\bullet\|}$.

1.c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, préciser $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, l'expression des n dérivées partielles premières $\dfrac{\partial\|\bullet\|}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$, puis $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(\dfrac{1}{\|\bullet\|}\Big)\right)(\boldsymbol{x})$, pour chaque $j = 1, \ldots, n$.

1.d) En déduire que, en un $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ quelconque on a :

$$\frac{\partial^2\|\bullet\|}{\partial x_j^2}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big(1 - \frac{x_j^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\Big), \quad \text{pour chaque } j = 1, \ldots, n.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.
On définit une application $F : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ comme composée $F = f \circ \|\bullet\|$.
Autrement dit, $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad F(x_1, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$.
On définit le laplacien de F par $\Delta F := \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}$.
On se propose dans la suite de calculer ΔF en fonction de f (et de ses dérivées).

2.a) Montrer que pour chaque $j = 1, \ldots, n$, en un $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ fixé arbitrairement on a : $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = f'\big(\|\boldsymbol{x}\|\big)\dfrac{x_j}{\|\boldsymbol{x}\|}$.

2.b) En déduire une expression pour $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}(\boldsymbol{x})$ en fonction de f' et f''.
(Indication : outre la question précédente, on pourra utiliser la question (1.c))

2.c) Conclure, en montrant la formule : $\Delta F(\boldsymbol{x}) = \dfrac{n-1}{\|\boldsymbol{x}\|} f'\big(\|\boldsymbol{x}\|\big) + f''\big(\|\boldsymbol{x}\|\big)$.

3. Particulariser la formule précédente pour le cas $n = 1$ en spécifiant que devient $\|\boldsymbol{x}\|$ pour ce cas. Retrouver ensuite le même résultat en calculant la dérivée seconde de la fonction $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto F(x) := f(|x|)$ dans le point courant x.