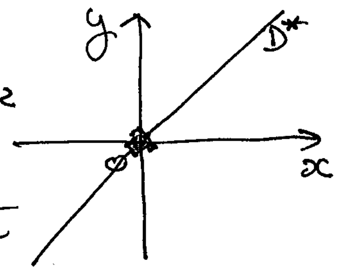
CORRIGÉ de l'EXAMEN de Rattrapage
(Session 2) 2021 – 2022 (14.06.2022)
FONCTIONS de PLUSIEURS VARIABLES

EXERCICE 1 : ①



② D^* n'est pas ouvert de $\mathbb{R}^2$ car $\forall (a,a) \in D^*$ $(a \neq 0)$ et $\forall \varepsilon > 0$ la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(\underbrace{(a,a)}_{\text{centre}} ; \underbrace{r = \varepsilon}_{\text{rayon}}) \not\subset D^*$.

③ D^* fermé de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D^*$ est ouvert de $\mathbb{R}^2$ or ceci est faux aussi car même si $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}((a,b), D)$ t.q. $\overset{\circ}{B}((a,b);\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ il reste quand même dans $\mathbb{R}^2 \setminus D^*$ le point $(0,0)$ pour lequel ceci n'est pas vrai, car $\text{dist}((0,0), D^*) = 0$ donc $\nexists \varepsilon > 0$ t.q. $B((0,0); \mathbb{R}^2 \setminus D^*) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D^*$.

Conclusion : D^* n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2 : Notons $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x - y^2$

① $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial e^u}{\partial x}(x,y) = \frac{d(e^u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) =$

$= e^{u(x,y)} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1\right) = (x^2 - 1) f(x,y)$

De même :

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\, f(x,y)$.

② (x,y) est pt critique pour $f \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Or, comme $f(x,y) = e^{u(x,y)} > 0$ $\forall (x,y)$ ceci revient, d'après (1) au système :

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (\pm 1, 0)$$

③ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) \underset{(1)}{=} 2x\, f(x,y) + (x^2-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$\overset{(1)}{=} \left((x^2-1)^2 + 2x\right) f(x,y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \underset{(1)}{=} -2 f(x,y) - 2y(-2y f(x,y))$

$= 2(2y^2 - 1) f(x,y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \overset{\text{Thm. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y f(x,y)\right) \overset{(1)}{=}$

$= -2y(x^2 - 1) f(x,y)$

④ Une matrice Hessienne de f en (a,b) : $H_{(a,b)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(a,b)}$

Or, pour $(a,b) = (\pm 1, 0) \leftarrow$ pts critiques on a d'après (3) :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1, 0) = \pm 2 f(\pm 1, 0)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1, 0) = -2 f(\pm 1, 0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pm 1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\pm 1, 0) = 0$. D'où :

$$H_{(\pm 1, 0)}(f) = \begin{pmatrix} \pm 2 f(\pm 1, 0) & 0 \\ 0 & -2 f(\pm 1, 0) \end{pmatrix} = 2 f(\pm 1, 0) \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec $f(\pm 1, 0) = e^{u(\pm 1, 0)} = \ldots = e^{\mp \frac{2}{3}} > 0$ ← calcul pas nécessaire.

5 Donc la discussion sur la nature des pts critiques $(\pm 1,0)$ peut être faite directement sur les matrices $A_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, les deux déjà diagonales. Alors

Pour $(1,0)$, $A_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a des v.p. de signes différents donc $\underbrace{(1,0) \text{ est pt. de selle}}$

Pour $(-1,0)$, $A_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a des v.p. du m̂ signe donc $(-1,0)$ est un extremum, et comme ds la hessienne correspond.

on a : "r" $= -2f(-1,0) < 0$ il s'agit d'un maximum local.

Alternativement, on peut raisonner en termes de déterminants :

$\det H_{(\pm 1,0)}(f) = (2f(\pm 1,0))^2 \det\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mp 4 f(\pm 1,0)^2$

et donc $H_{(1,0)}(f) < 0 \Rightarrow (1,0)$ pt de selle

$H_{(-1,0)}(f) > 0 \Rightarrow (-1,0)$ pt. d'extremum

et "r" $= -2f(-1,0) < 0 \Rightarrow$ c'est un max.

6 $\mathbb{R}^2$ est un ouvert (de lui-même) donc les extrema globaux sont à chercher parmi les locaux s'ils existent et si f était bornée. Or, il n'y a pas de min local donc pas de min global de f (bien que f soit positive, donc bornée inférieurement) et il n'y a qu'un max local en $(-1,0)$. Cependant $f(-1,0) = e^{2/3} < \lim_{x \to \infty} f(x,0) = +\infty$ donc pas de max global (f n'étant pas bornée supérieur)

EXERCICE 3 :

1.a $x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

. Si $x \neq y \Leftrightarrow (x-y) \neq 0$ donc on peut simplifier le numérat et le dén. par $(x-y)$ et par ailleurs...

1.b On a : $x^2+xy+y^2 = (x^2 - 2|x||y| + y^2) + (2|x||y| + xy)$

$= \underbrace{(|x|-|y|)^2}_{\geq 0} + \underbrace{|x|\cdot|y|}_{> 0} + (\underbrace{|x||y| + xy}_{\geq 0}) > 0$

(car le cas $x \neq y$ exclut le point $(0,0)$.)

Donc le dénominateur restant après simplification à savoir x^2+xy+y^2 est > 0 $\forall (x,y)$ t.q. $x \neq y$

Il résulte que f a été bien définie sur $\mathbb{R}^2$ (pour $x \neq y$ et bien sûr que pour $x = y$ aussi), et qu'on peut retenir, alternativement, l'expression $f(x,y) = (x+y)\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy}$ pour $x \neq y$ aussi.

2.a L'expression ci-dessus est une fonction fraction rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ donc par les thm généraux de continuité, elle est continue ~~en~~ chaque (x,y) t.q. $x \neq y$.

2.b Pour la continuité en $(0,0)$ on peut travailler à l'aide du critère polaire. On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ pour $\forall \theta \notin \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\pi\}$ car ces deux cas correspondent aux restrictions de f à D, qui sont évidemment continues puisque $f|_D = 0$ par déf.

On a : $\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}\right| = \left|\dfrac{r(\cos\theta+\sin\theta)r^2}{r^2 + r^2\cos\theta\sin\theta}\right|$

$= \dfrac{r^{\cancel{3}}|\cos\theta+\sin\theta|}{\frac{1}{2}\cancel{r^2}|2+\sin(2\theta)|} \leq \dfrac{2\cdot 2\, r}{1} = 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

(où pour le dénominator ici nous avons utilisé la minoration $2+\sin(2\theta) \geq 2-1 = 1$.)

La cvgce étant uniforme en θ, il résulte la cont. de f en $(0,0)$.

2.c $f(a,y) = \dfrac{a^4-y^4}{a^3-y^3} = \dfrac{(a+y)(a^2+y^2)}{a^2+ay+y^2}$ si $y\neq a$

D'où : $\lim\limits_{\substack{y\to a\\ \neq}} f(a,y) = \dfrac{2a\cdot 2a^2}{3a^2} = 4a \neq 0 \underset{\uparrow}{=} f(a,a)$
donnée par la déf. de f.

Donc f admet au moins une restriction passant par (a,a) qui est discont. en (a,a) donc f ne peut être continue en (a,a) dès lors que $a\neq 0$.

3.a $f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2} = x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} = x$

$f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{y^2} = y & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases} = y$

3.b Les applic. part. ci-dessus sont : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Leur dérivées en $0\in\mathbb{R}$ (que ce soit en var. x ou y) valent 1, d'où :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

3.c Cas des pts (a,b) avec $a\neq b$:

$f(x,b) = \begin{cases} \dfrac{x^4-b^4}{x^3-b^3} = (x+b)\dfrac{x^2+b^2}{x^2+xb+b^2} & \text{si } x\neq b \\ 0 & \text{si } x=b \end{cases}$

$f(a,y) = \begin{cases} \dfrac{a^4-y^4}{a^3-y^3} = (a+y)\dfrac{a^2+y^2}{a^2+ay+y^2} & \text{si } y\neq a \\ 0 & \text{si } y=a \end{cases}$

3.d La dérivation partielle en (a,b) est une opération locale, i.e. dans une boule de centre (a,b) et de rayon très petit. Or $\forall (a,b)\in\mathbb{R}\setminus D$ (i.e. $a\neq b$) il existe une telle boule qui n'intersecte pas D donc seulement les expressions de la première ligne de $f(x,b)$ et $f(a,y)$ sont concernées et elles sont des fonctions rationnelles donc dérivables.

On a donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{df(\cdot,b)}{dx}(a) \underset{\uparrow}{=}$ règles de dériv. usuelles

$= \left[\dfrac{4x^3(x^3-b^3) - (x^4-b^4)3x^2}{(x^3-b^3)^2}\right]_{x=a} = \ldots = \dfrac{a^2(a^4-4ab^3+3b^4)}{(a^3-b^3)^2}$

et, par symétrie entre x et y :

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \ldots = \dfrac{b^2(b^4-4ba^3+3a^4)}{(b^3-a^3)^2}$

3.e. Si $(a,b) = (1,0)$ le calcul ci-dessus donne :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ donc le DL1 en $(1,0)$ est :

$f(x,y) = f(1,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) + \|(x-1,y)\|\,\varepsilon(x-1,y)$

$= f(1,0) + (x-1) + \|(x-1,y)\|\,\varepsilon(x-1,y)$

où $\varepsilon(x-1,y)\to 0$ quand $\|(x-1,y)\|\to 0$.

4 QUESTION "BONUS" (i.e. hors barème)

Nous sommes ds le cas des points $(a,a) \in D \setminus \{(0,0)\}$

4.a Les applic. partielles de f correspondant à ce point ne diffèrent pas bcp de celles déduites à (3.c) à ceci près que $b = a$:

$$x \mapsto f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3} = (x+a)\dfrac{x^2+a^2}{x^2+ax+a^2} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

et

$$x \mapsto f(a,y) = \begin{cases} \dfrac{a^4 - y^4}{a^3 - y^3} = (a+y)\dfrac{a^2+y^2}{a^2+ay+y^2} & \text{si } y \neq a \\ 0 & \text{si } y = a. \end{cases}$$

4.b On a déjà vu au (2.c) que ces applications ne sont pas continues en $a \in \mathbb{R}$ dès lors que $a \neq 0$. Alors elles ne peuvent être dérivables, autrement dit, les dérivées partielles de f en un $(a,a) \neq (0,0)$ n'existent pas.