Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2021-2022 (**14.06.2022**)

Fonctions de plusieurs variables - Examen (session 2)

Durée : 1h30

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction
Toute réponse sans justification vaut zéro

EXERCICE 1 :
Notons par $D = \{(x,y) \mid x = y\}$ la première bissectrice dans $\mathbb{R}^2$. Soit $D^\star = D \setminus \{(0,0)\}$.

1. Dessiner $D^\star$ dans le plan muni d'un repère orthogonal xOy.
2. $D^\star$ est-il un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.
3. $D^\star$ est-il un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

[*Indication pour 3)* : alternativement, on pourrait voir si $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D^\star = (\mathbb{R}^2 \setminus D) \cup \{(0,0)\}$ est ou non un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$]

EXERCICE 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \exp(\frac{1}{3}x^3 - x - y^2)$.

1. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet *seulement* deux points critiques : $(-1,0)$ et $(1,0)$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de f en un point quelconque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Calculer la matrice hessienne de f pour chacun des deux points critiques mentionnés ci-dessus.
5. En déduire pour chacun de ces deux points critiques leur nature : s'agit-il d'un max, d'un min ou d'un point de selle ?
6. Établir, en justifiant la réponse, si f admet sur $\mathbb{R}^2$ un extremum global (max, min ou les deux).

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1.a) Factoriser le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle ci-dessus. En déduire que, dans le cas où $x \neq y$, l'expression de $f(x,y)$ peut être simplifiée pour aboutir à $(x+y)\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

1.b) Justifier pourquoi f a été bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

2. Notons par $D = \{(x,y) \mid x = y\}$ la première bissectrice dans $\mathbb{R}^2$. Soit $D^\star = D \setminus \{(0,0)\}$.

2.a) Justifier brièvement la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

2.b) Montrer que f est continue en $(0,0) \in D$.

2.c) Soit $a \neq 0$. Écrire l'expression de l'application partielle $y \mapsto f(a,y)$ (notée aussi $f(a,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Montrer que celle-ci n'est pas continue en $y = a$.
Peut-on en déduire que f n'est pas continue sur $D^\star$?

Tourner la page s.v.p. —>

3. On veut étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D^\star$.

3.a) Écrire l'expression des applications partielles de f en $(0,0)$, à savoir $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$.

3.b) Justifier la continuité de ces deux fonctions partielles $f(\,\cdot\,,0)$ et $f(0,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
Sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}$?
Peut-on en déduire l'existence des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ de f en $(0,0)$? Que valent ces dérivées ?

3.c) Soit à présent $a \neq b$. Écrire l'expression des applications partielles de f en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, à savoir $x \mapsto f(x,b)$ et $y \mapsto f(a,y)$.

3.d) Justifier la dérivabilité de ces deux applications partielles $f(\,\cdot\,,b)$ et $f(a,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
En déduire l'existence et l'expression des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ de f en (a,b).

3.e) En particulier, pour le point $(1,0) \in \Omega$, utiliser les expressions déduites à la question (3.d) pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.
En déduire le DL1 de f (développement limité de f d'ordre 1) au point $(1,0)$.

Questions "bonus" (i.e. hors barème) :

4. On veut étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $D^\star = D \setminus \{(0,0)\}$.

4.a) Soit $a = b \neq 0$. Écrire l'expression des applications partielles de f en un point $(a,a) \in D^\star$, à savoir $x \mapsto f(x,a)$ et $y \mapsto f(a,y)$.

4.b) Décider si ces deux applications partielles (notées $f(\,\cdot\,,a)$ et $f(a,\,\cdot\,)$) sont dérivables en $a \neq 0$. Autrement dit, étudier l'existence des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,a)$ de f en $(a,a) \neq (0,0)$.