CORRIGÉ EXAMEN FPV - SESSION 1 ("rattrapage covid") (1)

EXERCICE 1 :

(1) f est une application : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée sur $(\mathbb{R}^*)^2$ par une expression rationnelle, donc elle est même C^∞ sur $(\mathbb{R}^*)^2$. Reste à faire l'étude en $(0,0)$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{(y^2)^2}{\|(x,y)\|_2^2} \leq \frac{\|(x,y)\|_2^4}{\|(x,y)\|_2^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|\to 0]{} 0.$$

Donc f est continue en $(0,0)$ aussi.

(2) Les applic. partielles en $(0,0)$ sont :

$$y \xrightarrow[f(0,\cdot)]{} f(0,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{y^2} = y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$x \xrightarrow[f(\cdot,0)]{} f(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (**)$$

Pour les raisons énumérées ci-dessus elles sont C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
$f(\cdot,0) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on voit aisément de $(*)$ que $f(0,\cdot)$ est $C^\infty(\mathbb{R})$ aussi. En effet :

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{y^2-0}{y} = 0 = \left(\frac{d}{dy} f(0,\cdot)\right)\Big|_{y=0} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0) \end{cases} \quad (*')$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4y^3(x^2+y^2) - y^4 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (**')$$

(3) Des formules $(*')$ et $(**')$ on déduit "par les th. généraux" que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont C^∞.
Voyons ce qui se passe en $(0,0)$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \underset{(*')}{=} 2\frac{|x|\,y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 2\,\frac{\|(x,y)\|_2 \cdot \cancel{\|(x,y)\|_2^4}}{\cancel{\|(x,y)\|_2^4}} \xrightarrow[\|(x,y)\|_2 \to 0]{} 0.$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \underset{(**')}{=} 2\,\frac{|y|^3(2x^2+y^2)}{\|(x,y)\|_2^4} \leq 2\,\frac{\|(x,y)\|_2^3 \cdot 2\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2^4} = 4\|(x,y)\|_2 \to 0$$

En conclusion f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{-2\cdot 3}{4\cdot 2} = -\frac{3}{2}$

et aussi $f(1,-1) = \frac{1}{2}$. Donc le DL de f en $(1,-1)$ est :

$$f(x,y) = f(1,-1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)k}_{J(f)_{(1,-1)}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}} + \|(h,k)\|\cdot\varepsilon(h,k)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}h - \frac{3}{2}k + \|(h,k)\|\cdot\varepsilon(h,k).$$

où $\varepsilon(h,k) \to 0$ quand $(h,k)\to 0$.

(5) Pour les m̂ raisons évoquées auparavant, les 4 applic. partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\cdot)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\cdot)$ déduites des formules (*') et (**') pour un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ sont $C^\infty(\mathbb{R})$.

Nous reste à voir ce qui se passe en $(0,0)$: on a :

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$; $\quad y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$; $\quad y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \begin{cases} \frac{2y^5}{y^4} = 2y & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$

les premières étant des applic. nulles à 1 variable elles sont C^∞ (donc dérivables en 0 en particulier). Pour la dernière :

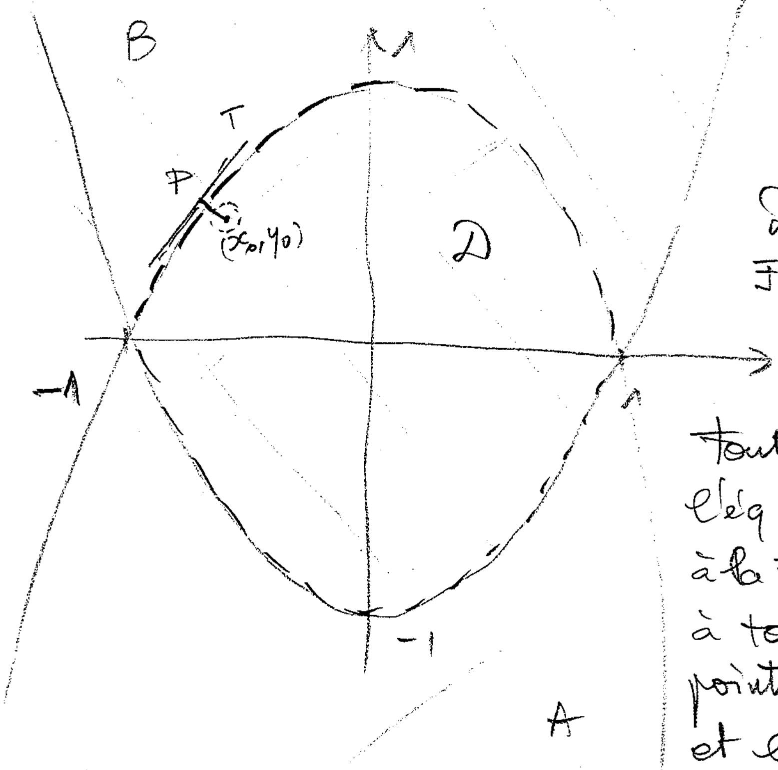
$$\lim_{\substack{y\to 0\\ \neq}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\to 0\\ \neq}} \frac{2y}{y} = 2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$$

En conclusion, en tout point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ les dérivées partielles premières de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent, autrement dit les 4 dérivées part. secondes de f existent,

MAIS en $(0,0)$ on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$

EXERCICE 2

(1) On dessine les paraboles d'équations $y = 1-x^2$ et $y = x^2-1$ pour délimiter les ens. des (x,y) vérifiant $\underbrace{y \leq 1-x^2}_{A}$ resp. $\underbrace{y \geq x^2-1}_{B}$.



On a $\mathcal{D} = A \cap B$

$\mathcal{D}$ est ouvert ssi $\forall (x_0,y_0) \in \mathcal{D}$ $\exists r>0$ t.q. $\overset{\circ}{B}((x_0,y_0);r) \subset \mathcal{D}$.

En effet, (voire figure) à partir de tout $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$ on peut tracer (trouver l'éq. cartésienne) d'une perpendiculaire à la tangente T. Et réciproquement, à tout $P \in \partial\mathcal{D}$ correspond dans $\mathcal{D}$ des points (x_0,y_0) ayant cette propriété, et en faisant courir P sur $\partial\mathcal{D}$ on couvre $\mathcal{D}$ de pts (x_0,y_0) correspondant à un tel P.

Or la distance entre ~~un~~ (x_0,y_0) et $\partial\mathcal{D}$ est justement celle entre (x_0,y_0) et un tel P. On prend alors $r_{(x_0,y_0)} = \dfrac{\text{dist}((x_0,y_0),\partial\mathcal{D})}{2}$ et on montre ainsi que $\forall (x_0,y_0) \in \mathcal{D}$ $\exists B((x_0,y_0);r) \subset \mathcal{D}$.

Pour borné, on voit bien que $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$ on a :

$$-1 \leq x^2-1 \leq y \leq 1-x^2 \leq 1 \quad \text{quand} \quad |x|<1 \text{ (ce qui est le cas pour } \mathcal{D}\text{)}.$$

Donc $\mathcal{D} \subset B((0,0);1)$ i.e. $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$: $\|(x,y)\|_2 \leq 1$.

(2) $\overline{\mathcal{D}}$ est le plus petit fermé (borné) contenant $\mathcal{D}$. Donc $\overline{\mathcal{D}}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et un thm connu assure qu'une fonct f continue sur un compact est bornée et elle atteint ses bornes dans des pts de ce compact. Donc néces. f admet un min et un max global sur $\overline{\mathcal{D}}$.

(3) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est critique de f ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2xy + 2x = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-y) = 0 \\ x^2 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ x^2 = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0) ; (-\sqrt{2},1) ; (\sqrt{2},1)\}$$

Mais seulement $(0,0)$ est dans $\mathcal{D}$.

(4)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x(1-y)\right) = 2(1-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y - x^2\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - x^2\right) = -2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

(5)
$$H_{(0,0)}(f) = \begin{pmatrix} 2(1-0) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La mat. est déjà diagonale et toutes les v.p. sont > 0. Donc il s'agit d'un min local (le seul sur $\mathcal{D}$) que f atteint en $(0,0)$. Il vaut $f(0,0) = 0$.

(6) Pour $(x,y) \in \mathcal{D}$ t.q. $y \geq 0$: $\partial\mathcal{D}$ est paramétré par

$x \mapsto (x, 1-x^2)$, $x \in [-1,1]$

Pour $(x,y) \in \mathcal{D}$ t.q. $y < 0$: ——— " ———

$x \mapsto (x, x^2-1)$, $x \in [-1,1]$.

Ceci donne naissance aux expressions des restrictions de f à $\partial\mathcal{D} \cap \{(x,y) \mid y \geq 0\}$ resp $\partial\mathcal{D} \cap \{(x,y) \mid y < 0\}$:

$g(x) = f(x, 1-x^2)$ resp. $h(x) = f(x, x^2-1)$ pour $x \in [-1,1]$

Par calcul, on a :

$$g(x) = (1-x^2)^2 - x^2(1-x^2) + x^2 = 1 - 2x^2 + x^4 \cancel{-x^2} + x^4 \cancel{+x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4$$

$$h(x) = (x^2-1)^2 - x^2(x^2-1) + x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + x^2 + x^2 = 1.$$

Etudions sur $[-1,1]$ la fonct g :

$$g'(x) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2-1) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_\pm = \pm \frac{1}{\sqrt2} \in [-1,1] \end{cases}$$

$g''(x) = 4(6x^2-1)$ ~~et~~ on a : $g''(\pm\frac{1}{\sqrt2}) = 4\cdot(3-1) > 0 \Rightarrow$ min en $\pm\frac{1}{\sqrt2}$
$g''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ max en 0

donc en $x = -\frac{1}{\sqrt2}$ on a un max de g et en $x = \frac{1}{\sqrt2}$ un min de g.

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt2}$		0		$\frac{1}{\sqrt2}$		1
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac12$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac12$	$\nearrow$	1
$g'(x)$		$+$			$-$			$+$	

Donc sur ∂D : $\begin{cases} f \text{ atteint la val. max} = 1 \text{ en :} \\ \quad \bullet \text{ tous les pts } (x, x^2-1) \text{ avec } x \in [-1,1] \\ \quad \bullet\ (0,1) \\ f \text{ atteint la val. min} = \frac12 \text{ en } \left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \frac12\right) \end{cases}$

7 Bilan sur les extrema globaux de f sur $\overline{D}$:

- Il y a un seul min global, qui coïncide avec le min local en $(0,0) \in D$ et où f vaut 0.
- Il y a une infinité de max globaux dans $\overline{D}$, aucun n'est local dans D, et ce sont ceux ~~de~~ l'ensemble :

$$\{(x, x^2-1) \mid x \in [-1,1]\} \cup \{(0,1)\}$$

où f vaut 1.