

Fonctions de plusieurs variables

Examen (session 1 - BIS)

Durée : 1h30

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction

Toute réponse sans justification vaut zéro

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tant que fonctions à 2 variables.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
En déduire l'ensemble sur lequel f est de classe C^1 .
4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$ et en déduire le DL1 de f (développement limité de f d'ordre 1) au point $(1, -1)$.
5. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en $(0, 0)$.

EXERCICE 2 :

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter $\mathcal{D}$ et montrer brièvement que $\mathcal{D}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
2. Sait-on déjà si f admet des extrema sur l'adhérence $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$?
3. Déterminer les points critiques de f sur $\mathcal{D}$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes de f en un point quelconque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
5. Donner la matrice hessienne de f en chacun des points critiques trouvés dans $\mathcal{D}$ et en déduire la nature de ces points (max, min ou point de selle).
6. Trouver une paramétrisation (par morceaux) de $\partial\mathcal{D}$, le bord de $\mathcal{D}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\partial\mathcal{D}$.
7. En déduire le minimum et le maximum de f sur $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$.