Fonctions de plusieurs variables : Sujet et Corrigé de l'Examen

Durée : 2h

NOTE : *Les corrigés proposés ont été rédigés dans un esprit pédagogique : plusieurs versions alternatives de résolution ont été données, des explications et des rappels du cours ont été insérés volontairement, des calculs simples ont été exposés en détail, en allant jusqu'à rappeller la définition des objets, etc. Il s'en suit que, dans une rédaction normale, le volume du corrigé devrait être bien plus réduit.*

EXERCICE 1 :

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
   Préciser les expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tant que fonctions à 2 variables.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
   En déduire l'ensemble sur lequel f est de classe C^1.
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$ et en déduire le DL1 de f (développement limité de f d'ordre 1) au point $(1,-2)$.

CORRIGÉ de l'Exercice 1 :

1. Remarquons que $x^2+y^2=0$ ssi $(x,y)=(0,0)$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$ la fonction a une expression rationnelle, donc par les théorèmes généraux sur la continuité de la somme et du produit elle est continue en chacun de ces points. Reste à étudier la continuité en $(0,0)$. On peut le faire par les normes ou bien par passage en coordonnées polaires.

Pour la première variante, on tient compte de $0 \leqslant (|x|\pm|y|)^2 = x^2+y^2 \pm 2|xy|$ et de l'inégalité triangulaire $|a\pm b| \leqslant |a|+|b|$, pour obtenir :

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |x|\cdot|y|\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{||(x,y)||_2^2}{2}$$

qui tend à 0 lorsque cette norme (euclidienne) de $\mathbb{R}^2$ tend à zéro.

Remarquer qu'on aurait pu tout aussi bien arriver à nos fins en utilisant la majoration de $|x|$ et de $|y|$ par $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$ ou par $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|+|y|\}$ puisque toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Alternativement, pour justifier la continuité de f en $(0,0)$ à l'aide du "critère polaire de continuité" on passe en coordonnées polaires $(r,\theta)\in[0,\infty[\times[0,2\pi[$ par $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ et on obtient la majoration uniforme en θ (ce qui est le but de la méthode) :

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = \frac{r^2|\sin(2\theta)|}{2}\cdot\frac{r^2|\cos(2\theta)|}{r^2} = \frac{r^2|\sin(4\theta)|}{4} \leqslant \frac{r^2}{4}$$

dont le membre de droite tend à zéro lorsque $r = ||(x,y)||_2$ tend à zéro.

En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Toujours par le même type de raisons que celles invoquées auparavant (théorèmes généraux de dérivabilité), les applications partielles attachées à f en chaque point $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, notées $f(\cdot,b)$ respectivement $f(a,\cdot)$ sont, en tant que applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *indéfiniment* dérivables car expressions rationnelles à une variable réelle.

⚠ Noter cependant que, si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'avèrent être bien définies (exister) en chaque (a,b) d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ *vues en tant que fonctions à 2 variables* cela n'assure même pas qu'elles soient continues forcément.

On les calcule, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \frac{df(\cdot,b)}{dx}(a) = \Big[\frac{f(x,b)}{x} + xb\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\Big)\Big]_{x=a} = \frac{f(a,b)}{a} + 4\frac{a^2b^3}{(a^2+b^2)^2}$$

et comme $f(x,y) = -f(y,x)$ on en déduit aussi (sans devoir calculer) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \frac{df(a,\cdot)}{dy}(b) = \frac{f(a,b)}{b} - 4\frac{a^3b^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Il nous reste juste à vérifier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$, à savoir, que $f(\cdot,0)$ est dérivable en $a=0$ et que $f(0,\cdot)$ est dérivable en $b=0$. Mais puisque lorsque $x \neq 0$ respectivement $y \neq 0$ on a $f(x,0) - f(0,0) = 0 - 0 = f(0,y) - f(0,0)$, en divisant ceci par $x - 0$ respectivement par $y - 0$ on obtient 0 toujours, ce qui prouve que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et sont nulles.

En conclusion, on peut voir les dérivées partielles premières de f comme des fonctions réelles *à deux variables* définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{y} + 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Tenant compte des expressions ci-dessus (et de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$), on peut justifier (de la même façon qu'on l'a fait pour f, i.e. "théorèmes généraux") la continuité de ses dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$. Nous reste donc juste à prouver la continuité en $(0,0)$ de ces deux dérivées partielles. On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &\leqslant |y|\cdot\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| + |x|\frac{|2xy|^2}{||(x,y)||^4} \leqslant |y|\frac{||(x,y)||^2}{||(x,y)||^2} + |x|\frac{||(x,y)||^4}{||(x,y)||^4} \\ &= |x| + |y| = ||(x,y)||_1,\end{aligned}$$

qui tend à zéro lorsque (x,y) tend à zéro (en n'importe quelle norme de $\mathbb{R}^2$ puisqu'elles sont toutes équivalentes). De la même façon, et exactement avec la même majoration

finale, on montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.
En conclusion, les deux dérivées partielles de f étant continues sur $\mathbb{R}^2$, on a $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

4. f étant de classe C^1, elle admet un DL1 en chaque point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \mathbb{d}_{(a,b)}(h,k) + ||(h,k)||\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(h,k) \to 0$ lorsque $||(h,k)|| \to 0$ et où $\mathbb{d}_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire différentielle de f en (a,b) qui, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une matrice 1×2 jacobienne de f en (a,b) de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.
Pour $(a,b) = (1,-2)$ on a $f(1,-2) = 6/5$ ainsi que :
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 6/5 - 32/25 = -2/25$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = -3/5 - 16/25 = -31/25$.
D'où le DL1 de f en $(1,-2)$ s'écrit :

$$f(1+h,-2+k) = \frac{6}{5} - \frac{2}{25}h - \frac{31}{25}k + ||(h,k)||\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(h,k) \to 0$ lorsque $||(h,k)|| \to 0$.

EXERCICE 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par : $f(x,y) = \sin x + y^3 - 3y$.
On se propose de faire une étude complète des extrema de f.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en un point (x,y) quelconque.

2. Montrer que l'ensemble des points critiques de f est

$$\mathscr{C} = \left\{ \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \pm 1 \right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \times \{-1,1\}.$$

3. Calculer les dérivées partielles secondes de f en un point (x,y) quelconque et donner la matrice Hessienne $H_{(x,y)}(f)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4. Donner $H_{(x,y)}(f)$ pour le cas où (x,y) est un point critique.

5. En déduire (en faisant une discussion sur la parité de $k \in \mathbb{Z}$) que, bien que le nombre de points critiques est infini (i.e. $\operatorname{card}\mathscr{C} = \infty$), à ces points ne correspondent que quatre matrices Hessiennes ayant des valeurs numériques différentes, matrices que l'on précisera.

6. Pour chacune des 4 matrices Hessiennes obtenues déterminer la nature des points critiques associés. À savoir, préciser s'il s'agit de points de minima locaux, de maxima locaux ou de points selle pour f.

7. Soit $D = [-\pi,\pi] \times [-2,2]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$.

7.a) D est-il un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$? D est-il borné ? En déduire de ces réponses si f admet des extrema globaux sur D.

7.b) Dessiner D dans un repère orthogonal xOy et représenter les points de $\overset{\circ}{D}$ (l'intérieur de D) où f admet des extrema locaux (minimum ou maximum). (Indication : pour s'orienter, on va prendre $\sqrt{2} = 1,41$, $\sqrt{3} = 1,73$, $\pi = 3,14$)

7.c) Écrire les 4 applications partielles de f qui sont les restrictions de f à chaque côté (segment) de la frontière de D.

7.d) En étudiant la variation de ces restrictions de f, rechercher les extrema de ces applications partielles.

7.e) Conclure, pour préciser les extrema globaux de f sur D.

CORRIGÉ de l'Exercice 2 :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y^2-1)$.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0$ et $y \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (x,y) \in \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right)\pi \times \mathbb{R}$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $y = \pm 1 \Longleftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R} \times \{-1,1\}$.
En intersectant ces deux ensembles, on obtient l'ensemble $\mathscr{C}$ donné dans l'énoncé.

3. On a $H_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$.

4. Dans les points critiques, comme $-\sin x = -\sin((k+1/2)\pi) = (-1)^{k+1}$ et $6y = \pm 6$, on déduit les hessiennes correspondant aux points de $\mathscr{C}$ sous la forme :
$H_{((k+1/2)\pi,\pm 1)}(f) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{pmatrix}$. Alors, selon si k est pair ou impair et tenant compte de l'alternance ± 6 on a 4 possibilités de matrices Hessiennes (listées ci-dessous).

5. et **6.** On a 4 cas de figure pour les points critiques :

▶ si k est impair, pour les le points $((k+1/2)\pi, 1)$ la hessienne est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
Elle est déjà diagonale et ses valeurs propres non-nulles ont le même signe. Donc dans ces points critiques f a un extremum local.
Comme ce signe est positif, il s'agit d'un minimum local.

▶ si k est pair, pour les le points $((k+1/2)\pi, -1)$ la hessienne est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.
Elle est déjà diagonale et ses valeurs propres non-nulles ont le même signe. Donc dans ces points critiques f a un extremum local.
Comme ce signe est négatif, il s'agit d'un maximum local.

▶ si k est impair, pour les le points $((k+1/2)\pi, -1)$ la hessienne est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.
Elle est déjà diagonale et ses valeurs propres non-nulles ont des signes contraires. Donc dans ces points critiques f n'a pas d'extremum local mais il s'agit des points selle.

▶ si k est pair, pour les le points $((k+1/2)\pi, 1)$ la hessienne est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
Elle est déjà diagonale et ses valeurs propres non-nulles ont des signes contraires. Donc dans ces points critiques f n'a pas d'extremum local mais il s'agit des points selle.

Alternativement, vu qu'on a à faire à des hessiennes 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ on pourrait justifier les conclusions ci-dessus à l'aide du calcul du déterminant $rt - s^2$ de chacune des 4 hessiennes ci-dessus. Si celui-ci est strictement positif (comme dans les premiers deux cas) on a à faire à un extremum local de f. La distinction entre min et max se fait à l'aide du signe de la valeur de $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ dans le point critique considéré : dans le premier cas $r = 1 > 0$ donc on a un min, dans le deuxième cas $r = -1 < 0$ donc on a un max. Pour les autres deux cas le déterminant est négatif (strictement) ce qui permet de trancher aussi : ça correspond à des points selle.

7.a) Pour justifier que D est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et qu'il est borné, autrement dit, qu'il est un compact, on peut procéder de plusieurs manières.

▶ D est un fermé ssi son complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Pour les points tels que $|x| > |y|$ la distance entre (x, y) et D est plus grande ou égale à $|x| - \pi > 0$, par la définition du complémentaire. Alors la boule ouverte $B\big((x, y); (|x| - \pi)/2\big)$ de centre (x, y) et rayon $(|x| - \pi)/2$ sera inclue dans le complémentaire de D. On raisonne pareillement pour les points du complémentaire de D pour lesquels $|x| < |y|$: toute boule $B\big((x, y); (|x| - 2)/2\big)$ de centre (x, y) et rayon $(|x| - 2)/2$ sera inclue dans le complémentaire de D. En conclusion, $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc D est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Enfin, D est un ensemble borné car puisque $\pi < 2$, le rectangle D est inclus dans le carré $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2\}$ qui n'est autre que la boule de rayon 2 dans la norme "max" usuelle $|| \cdot ||_\infty$. Ceci suffit, car toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

▶ *Alternativement*, on pourrait "faire d'une pierre deux coups" en montrant la compacité de D par un seul argument.

Rappelons un résultat du cours : puisque toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes il n'y a pas de boule ouverte $B\big((a, b); ||(a, b)|| < r\big)$ qui ne soit ouverte aussi si on remplace la norme $|| \cdot ||$ par une autre. La même affirmation est vraie pour les boules fermées (si on remplace $<$ par $\leqslant$).
Il suffira donc de montrer que D est lui-même une boule fermée pour une certaine norme de $\mathbb{R}^2$. En effet, comme toute boule fermée est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et toute boule est bornée par définition, on aura montré que D est un compact.
Or, comme D est un rectangle plein qui contient sa frontière, l'analogie avec la boule unité fermée dans la norme $|| \cdot ||_\infty$, qui est un carré, est frappante. On se rappelle que pour la norme $|| \cdot ||_\infty$ définie par $||(x, y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ on trace la boule unité selon si $|x| > |y|$ ou $|x| < |y|$ ce qui est délimité dans le plan par les droites $y = \pm x$ (diagonales de la boule unité en cette norme). Pour D on n'a donc qu'à imiter ceci en utilisant les droites $y = \pm\frac{2}{\pi}x$, diagonales de D. On trouve ainsi une norme $||| \cdot |||_\infty$ "adaptée à D" définie par $|||(x, y)|||_\infty = \max\{\frac{2}{\pi}|x|, |y|\}$ et dans laquelle D est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et rayon 2, donc c'est bien un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
⚠ Remarquer que la norme précédente n'est pas unique : par exemple si on avait choisi $|||(x, y)|||'_\infty = \max\{\frac{1}{\pi}|x|, \frac{1}{2}|y|\}$), D aurait été la boule unité fermée de centre $(0, 0)$ et pour $|||(x, y)|||''_\infty = \max\{|x|, \frac{\pi}{2}|y|\}$), D est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et rayon π.

En conclusion, D est fermé et borné donc un compact de $\mathbb{R}^2$ et un théorème du cours dit que une fonction continue sur un compact atteint ses bornes sur ce compact, donc sur D la fonction f a des min et max globaux.

7.b) Une fois le dessin fait, on constate que dans le rectangle D donné on a 4 points critiques (aucun sur sa frontière), dont
- ▶ deux points de selle (pas intéressants pour nous)
- ▶ un min en $(-\pi/2, 1)$ où $f(-\pi/2, 1) = -3$,
- ▶ un max en $(\pi/2, -1)$ où $f(\pi/2, -1) = 3$.

7.c) Les restrictions de f aux segments sont :
▶ pour les côtés horizontaux de la frontière de D : $f(x, \pm 2) = \sin x \pm 2,\ x \in [-\pi, \pi]$.
▶ pour les côtés verticaux de la frontière de D :
$f(\pm\pi, y) = \sin(\pm\pi) + y^3 - 3y = y^3 - 3y,\ y \in [-2, 2]$. Donc $f(\pi, \cdot) = f(-\pi, \cdot)$.

7.d) Concernant les applications partielles $f(\cdot, \pm 2)$ sur $[-\pi, \pi]$, on a $-3 \leqslant \sin x \pm 2 \leqslant 3$ plus précisément $f(\cdot, 2)$ atteint un max valant 3 en $x = \pi/2$ et $f(\cdot, -2)$ atteint un min valant -3 en $x = -\pi/2$.

Aussi, une étude des variations de $f(\pm\pi,\cdot)$ sur $[-2,2]$ donne : $-2 \leqslant f(\pm\pi,\cdot) \leqslant 2$ donc des extrema existent mais ne sont pas pas "en compétition" avec ceux de f valant ± 3 par ailleurs.

7.e) En faisant le bilan des valeurs maximales/minimales atteintes par f dans les points de l'intérieur de D et dans les points de la frontière de D, on constate des valeurs communes égales à 3 pour les maxima et égales à -3 pour les minima, ce qui en fait de ces points des extrema globaux. Plus précisément :

▶ Minima globaux en : $(-\pi/2, 1)$ et $(-\pi/2, -2)$, pour une valeur de f égale à -3.

▶ Maxima globaux en : $(\pi/2, -1)$ et $(\pi/2, 2)$ pour une valeur de f égale à 3.

EXERCICE 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On définit les applications g et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y) = f(xy) \quad \text{et} \quad h(x,y) = f(x^2+y^2).$$

- **1.a)** Calculer, dans un (x,y) quelconque de $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de g et de h en fonction de la dérivée f' de f.
- **1.b)** En déduire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les matrices jacobiennes $J_{(x,y)}(g)$ de g et $J_{(x,y)}(h)$ de h en un point quelconque (x,y) (aussi en fonction de f').

2. On définit à présent l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $F = (g,h)$.

- **2.a)** Donner la matrice jacobienne $J_{(x,y)}(F)$ de F en un point quelconque (x,y) (toujours en fonction de f')
- **2.b)** Pour le cas où f est donnée par : $f(u) = e^{2u}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, donner la matrice jacobienne de F en $(1,-1)$ et en déduire le DL1 de F en $(1,-1)$.

3. On se propose de retrouver $J_{(x,y)}(F)$ de la question (2.a) par une autre voie :

- **3.a)** Montrer que F peut se mettre sous la forme d'une composée $\Psi \circ \Phi$ où les fonctions Ψ, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(x,y) &= (xy, x^2+y^2) \\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \Psi(u,v) &= (f(u), f(v)). \end{aligned}$$

- **3.b)** Donner, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les matrices :
  $J_{(x,y)}(\Phi)$ jacobienne de Φ calculée en un point quelconque (x,y), et
  $J_{(u,v)}(\Psi)$ jacobienne de Ψ calculée en un point quelconque (u,v) (toujours en termes de f').
- **3.c)** En déduire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne $J_{(x,y)}(F)$ de F en un point quelconque (x,y) (écrite en fonction de f').

CORRIGÉ de l'Exercice 3 :

1.a) Pour le calcul des dérivées partielles de g et h seules les applications partielles leur correspondant (dans un point arbitrairement fixé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) sont concernées. En effet, en notant u et v les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = xy$ et $v(x,y) = x^2+y^2$, on a $g = f \circ u$ et $h = f \circ v$. Or, les applications partielles de u et v ainsi que f étant des fonctions à une seule variable réelle, les règles usuelles de dérivation de la composée s'appliquent. Ainsi, en tenant compte de :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{du(\cdot,y)}{dx}(x)=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{du(x,\cdot)}{dy}(y)=x \ \text{ et}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{dv(\cdot,y)}{dx}(x)=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{dv(x,\cdot)}{dy}(y)=2y,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{dg(\cdot,y)}{dx}(x)=\frac{d(f\circ u)(\cdot,y)}{dx}(x)=f'((u(\cdot,y))(x))\frac{du(\cdot,y)}{dx}(x)\\ &= f'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=yf'(xy)\end{aligned}$$

et de la même manière :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xf'(xy),\quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2xf'(x^2+y^2)\quad\text{et}\quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2yf'(x^2+y^2).$$

1.b) Par définition, les jacobiennes des applications différentiables g et $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont les matrices 1×2 suivantes :

$$\begin{aligned}J_{(x,y)}(g) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yf'(xy) & xf'(xy)\end{pmatrix}=f'(xy)\begin{pmatrix}y & x\end{pmatrix},\\ J_{(x,y)}(h) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xf'(x^2+y^2) & 2yf'(x^2+y^2)\end{pmatrix}=f'(x^2+y^2)\begin{pmatrix}2x & 2y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.a) On rappelle que la définition de le matrice jacobienne d'une fonction $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dans un point (x,y), par exemple celle de $F=(g,h)$, est : $J_{(x,y)}(F)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$.

Ceci fournit (avec les calculs de 1.a)) : $J_{(x,y)}(F)=\begin{pmatrix}yf'(xy) & xf'(xy)\\ 2xf'(x^2+y^2) & 2yf'(x^2+y^2)\end{pmatrix}$.

2.b) Pour $f(u)=e^{2u}$ on a $f'(u)=2e^{2u}$. Donc en $(x,y)=(1,-1)$, si u note xy, alors $f'(u)=2/e$ et si u note x^2+y^2, alors $f'(u)=2e^2$. Il s'en suit que pour cet f on a :

$$J_{(1,-1)}(F)=\begin{pmatrix}-2/e^2 & 2/e^2\\ 4e^4 & -4e^4\end{pmatrix}.$$

Le DL1 de $F:=(g,h)$ en $(1,-1)$ est, pour chaque couple $(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2$ avec $||(k_1,k_2)||\to 0$, une égalité vectorielle en $\mathbb{R}^2$, qui, dans une base canonique de celui-ci, s'écrit :

$$\begin{aligned}&F(1+k_1,-1+k_2):=\\ &\begin{pmatrix}g(1+k_1,-1+k_2)\\ h(1+k_1,-1+k_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g(1,-1)\\ h(1,-1)\end{pmatrix}+J_{(1,-1)}(F)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}+\left|\left|\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}\right|\right|\begin{pmatrix}\varepsilon_1(k_1,k_2)\\ \varepsilon_2(k_1,k_2)\end{pmatrix}\\ &\qquad = \begin{pmatrix}e^{-2}\\ e^4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2e^{-2} & 2e^{-2}\\ 4e^4 & -4e^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}+\left|\left|\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}\right|\right|\begin{pmatrix}\varepsilon_1(k_1,k_2)\\ \varepsilon_2(k_1,k_2)\end{pmatrix}\\ &\qquad = \begin{pmatrix}e^{-2}(1-2k_1+2k_2)\\ e^4(1+4k_1-4k_2)\end{pmatrix}+\left|\left|\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}\right|\right|\begin{pmatrix}\varepsilon_1(k_1,k_2)\\ \varepsilon_2(k_1,k_2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

où $\big(\varepsilon_1(k_1,k_2),\varepsilon_2(k_1,k_2)\big)\to(0,0)$ lorsque $(k_1,k_2)\to(0,0)$.

3.a) En notant u et v les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = xy$ et $v(x,y) = x^2 + y^2$, on a $g = f \circ u$ et $h = f \circ v$. Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \Phi)(x,y) &= \Psi(\Phi(x,y)) = \Psi(u(x,y), v(x,y)) = (f(u(x,y)), f(v(x,y))) \\ &= (g(x,y), h(x,y)) = F(x,y).\end{aligned}$$

3.b) On applique la définition de la matrice jacobienne d'une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (rappelée à la question 2.a) ci-dessus), mais cette fois-ci pour :
$\Phi(x,y) = (xy, x^2 + y^2) = (u(x,y), v(x,y))$ en un $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour
$\Psi(u,v) = (f(u), f(v)) = (G(u,v), H(u,v))$ en un $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}J_{(x,y)}(\Phi) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}, \\ J_{(u,v)}(\Psi) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial H}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial H}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{df(u)}{du} & \dfrac{df(u)}{dv} \\ \dfrac{df(v)}{du} & \dfrac{df(v)}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(u) & 0 \\ 0 & f'(v) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.c) Dans l'Appendice théorique qui suit après la fin du corrigé de cette question, on rappelle la règle de différentiation des fonctions composées. Pour le cas de $F = (g,h)$, fonction qui s'avère être (cf. question 3.a)) la composée $\Psi \circ \Phi$. Ainsi, on a par différentiation en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{d}_{(x,y)} F = \mathbb{d}_{\Phi(x,y)} \Psi \circ \mathbb{d}_{(x,y)} \Phi = \mathbb{d}_{(u(x,y),v(x,y))} \Psi \circ \mathbb{d}_{(x,y)} \Phi$$

ce qui, dans une base (canonique) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit en termes de matrices jacobiennes comme :

$$\begin{aligned}J_{(x,y)}(F) &= J_{(u(x,y),v(x,y))}(\Psi) \cdot J_{(x,y)}(\Phi) = \begin{pmatrix} f'(u(x,y)) & 0 \\ 0 & f'(v(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} yf'(xy) & xf'(xy) \\ 2xf'(x^2+y^2) & 2yf'(x^2+y^2) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver le résultat obtenu à la question 2.a) par calcul direct.

APPENDICE théorique (facultatif pour la rédaction du corrigé) :
On rappelle la règle générale de différentiation d'une composée de fonctions différentiables :

Si $\Psi = \psi \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en un point $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $\varphi(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^p$ alors Ψ est différentiable en $\boldsymbol{a}$ et si $\mathbb{d}_{\boldsymbol{a}} \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{d}_{\varphi(\boldsymbol{a})} \psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ notent les applications (linéaires) différentielles de φ et de ψ dans les points $\boldsymbol{a}$ et $\varphi(\boldsymbol{a})$ respectivement, alors :

$$\mathbb{d}_{\boldsymbol{a}} \Psi = \mathbb{d}_{\varphi(\boldsymbol{a})} \psi \circ \mathbb{d}_{\boldsymbol{a}} \varphi. \qquad (*)$$

À présent, on se propose d'appliquer ce résultat général à des fonctions rencontrées dans l'Exercice 3.

► Tout d'abord, on rappelle que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, en chaque $a \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{d}_a f = f'(a)$, autrement dit, la différentielle de f en a est l'application constante valant le scalaire $f'(a) \in \mathbb{R}$.

► La règle de différentiation $(*)$ du cas général (rappelée auparavant) s'écrit pour le cas de $g = f \circ u$ et $h = f \circ v$, les deux vues à tour de rôle à la place du Ψ, comme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad \mathbb{d}_{(x,y)}\, g = \mathbb{d}_{xy}\, f \circ \mathbb{d}_{(x,y)}\, u \quad \text{et} \quad \mathbb{d}_{(x,y)}\, h = \mathbb{d}_{x^2+y^2}\, f \circ \mathbb{d}_{(x,y)}\, v.$$

Or, d'après ce qui a été dit auparavant, $\mathbb{d}_{xy}\, f = f'(xy)$ et $\mathbb{d}_{x^2+y^2}\, f = f'(x^2+y^2)$. On obtient alors dans une base canonique de $\mathbb{R}^2$ en termes de matrices jacobiennes : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} J_{(x,y)}(g) & = & f'(xy) J_{(x,y)}(u) = f'(xy) \cdot \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \\ J_{(x,y)}(h) & = & f'(x^2+y^2) J_{(x,y)}(v) = f'(x^2+y^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \end{array}$$

et on retrouve ainsi le résultat obtenu à (1.b).

► Toujours avec la règle générale $(*)$ de différentiation d'une composée on a, cette fois-ci avec $F = (g, h)$ qui s'avère être la composée $\Psi \circ \Phi$:

$$\mathbb{d}_{\boldsymbol{a}}\, F = \mathbb{d}_{\varphi(\boldsymbol{a})}\, \Psi \circ \mathbb{d}_{\boldsymbol{a}}\, \Phi.$$

La suite de ce cas a été traitée ci-dessus dans le corrigé de la question 3.c)