Université de Cergy-Pontoise - L2 - 2021-2022 (**04.01.2022)**

Fonctions de plusieurs variables
Examen (session 1)
Durée : 2h

Les documents, smartphones, tablettes, smartwatch et calculatrices ne sont pas autorisés

Les exercices sont indépendants. Bien soigner la rédaction

Toute réponse sans justification vaut zéro

EXERCICE 1 :

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser les expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tant que fonctions à 2 variables.

3. Étudier la continuité des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
En déduire l'ensemble sur lequel f est de classe C^1.

4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$ et en déduire le DL1 de f (développement limité de f d'ordre 1) au point $(1,-2)$.

EXERCICE 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par : $f(x,y) = \sin x + y^3 - 3y$.
On se propose de faire une étude complète des extrema de f.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en un point (x,y) quelconque.

2. Montrer que l'ensemble des points critiques de f est

$$\mathscr{C} = \left\{ \left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \pm 1 \right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)\pi \times \{-1,1\}.$$

3. Calculer les dérivées partielles secondes de f en un point (x,y) quelconque et donner la matrice Hessienne $H_{(x,y)}(f)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4. Donner $H_{(x,y)}(f)$ pour le cas où (x,y) est un point critique.

5. En déduire (en faisant une discussion sur la parité de $k \in \mathbb{Z}$) que, bien que le nombre de points critiques est infini (i.e. $\operatorname{card}\mathscr{C} = \infty$), à ces points ne correspondent que quatre matrices Hessiennes ayant des valeurs numériques différentes, matrices que l'on précisera.

6. Pour chacune des 4 matrices Hessiennes obtenues déterminer la nature des points critiques associés. À savoir, préciser s'il s'agit de points de minima locaux, de maxima locaux ou de points selle pour f.

Tourner la page s.v.p. —>

7. Soit $D = [-\pi, \pi] \times [-2, 2]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$.

7.a) D est-il un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$? D est-il borné ? En déduire de ces réponses si f admet des extrema globaux sur D.

7.b) Dessiner D dans un repère orthogonal xOy et représenter les points de $\overset{\circ}{D}$ (l'intérieur de D) où f admet des extrema locaux (minimum ou maximum). (Indication : pour s'orienter, on va prendre $\sqrt{2} = 1,41$, $\sqrt{3} = 1,73$, $\pi = 3,14$)

7.c) Écrire les 4 applications partielles de f qui sont les restrictions de f à chaque côté (segment) de la frontière de D.

7.d) En étudiant la variation de ces restrictions de f, rechercher les extrema de ces applications partielles.

7.e) Conclure, pour préciser les extrema globaux de f sur D.

EXERCICE 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On définit les applications g et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y) = f(xy) \quad \text{et} \quad h(x,y) = f(x^2+y^2).$$

1.a) Calculer, dans un (x,y) quelconque de $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de g et de h en fonction de la dérivée f' de f.

1.b) En déduire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les matrices jacobiennes $J_{(x,y)}(g)$ de g et $J_{(x,y)}(h)$ de h en un point quelconque (x,y) (aussi en fonction de f').

2. On définit à présent l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $F = (g,h)$.

2.a) Donner la matrice jacobienne $J_{(x,y)}(F)$ de F en un point quelconque (x,y) (toujours en fonction de f')

2.b) Pour le cas où f est donnée par : $f(u) = e^{2u}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, donner la matrice jacobienne de F en $(1,-1)$ et en déduire le DL1 de F en $(1,-1)$.

3. On se propose de retrouver $J_{(x,y)}(F)$ de la question (2.a) par une autre voie :

3.a) Montrer que F peut se mettre sous la forme d'une composée $\Psi \circ \Phi$ où les fonctions Ψ, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \Phi(x,y) &= (xy, x^2+y^2) \\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \Psi(u,v) &= (f(u), f(v)). \end{aligned}$$

3.b) Donner, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les matrices :
$J_{(x,y)}(\Phi)$ jacobienne de Φ calculée en un point quelconque (x,y), et
$J_{(u,v)}(\Psi)$ jacobienne de Ψ calculée en un point quelconque (u,v) (toujours en termes de f').

3.c) En déduire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne $J_{(x,y)}(F)$ de F en un point quelconque (x,y) (écrite en fonction de f').