Corrigé de l'Examen d'Algèbre Linéaire 3 (08.01.2025)

EXERCICE 1 :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{car } \mathrm{L}_1 = -\mathrm{L}_3)$

2) $$P(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (4-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = -(x-4)\left[(x-3)^2-1\right]$$
$$= -(x-4)(x-2)(x-4) = -(x-2)(x-4)^2$$

3) Valeurs propres $\lambda = 2$ simple et $\lambda = 4$ double.

4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

$\Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}(1, -2; 2)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+z = 0$$

$\Rightarrow E_4 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ car $(x,y,-x) = x(1,0,-1) + y(0,1,0)$.

5) $\dim E_2 = 1$, $\dim E_4 = 2$ donc $\dim E_2 + \dim E_4 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 :

1) $$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & -1 \\ 2 & -1-x & 1 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & x-2 \\ 2 & -1-x & 1 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1-x & 1 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix}$$
$$= (2-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-x & 3 \\ -1 & 2 & -x \end{vmatrix} = (2-x) \cdot \begin{vmatrix} -1-x & 3 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = (2-x) \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 2-x & -x \end{vmatrix}$$
$$= (2-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x+3).$$

Alternativement, on pourrait développer $P(x)$ jusqu'à l'obtention d'un polynôme de degré 3. Par exemple,
$$P(x) = -(x+1)(x-1)^2 - 4 - 2 + x + 1 + 2(x-1) + 4(x-1) = -(x+1)(x-1)^2 + 6(x-1) + x - 5$$
$$= -(x+1)(x-1)^2 + 7x - 11 = -(x+1)\left(x^2-2x+1\right) + 7x - 11$$
$$= -x^3 + 2x^2 - x - x^2 + 2x - 1 + 7x - 11 = -x^3 + x^2 + 8x - 12$$

Mais alors on doit utiliser l'hypothèse $P(-3) = 0$. Donc $\exists\, a, b, c$ tels que : $P(x) = -(x+3)\left(ax^2+bx+c\right)$. Par identification des termes de plus haut resp. bas degré on trouve : $a = 1, c = 4$ et pour le terme en x on trouve : $8 = -4 - 3b$ i.e. $b = -4$, et finalement $P(x) = -(x+3)\left(x^2-4x+4\right) = -(x+3)(x-2)^2$.

On en déduit ainsi les valeurs propres $\lambda = 2$ (double) et $\lambda = -3$ (simple).

2) $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, et $\det(A - 2I_3) = 0$ car 2 est valeur propre.

Or, le mineur $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$ donc $\mathrm{Rang}\,(A - 2I_3) = 2$

3) Théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}(A - 2J_3) = 1 = \dim E_2$.
Donc multiplicité algébrique $= 1 \neq 2 =$ multiplicité polynomiale $\Longrightarrow$ A non-diagonalisable.

4) P est scindé donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 :

1) $P(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x-2)(x-3) - 2 = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

Pour la v.p. $= 1$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}(1, -1)$

Pour la v.p. $= 4$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_4 = \mathrm{Vect}(2, 1)$ donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $X^2 = A \implies AX = X^2X = XX^2 = XA.$

De surcroît, comme A a deux v.p. distinctes, par le (2) du Thm. 32.1 (du cours PDF), $P^{-1}XP$ est diagonale.

Donc en posant $P^{-1}XP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} X^2 = A \quad &\Leftrightarrow \quad P^{-1}X^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow P^{-1}XPP^{-1}XP = P^{-1}AP \Leftrightarrow (P^{-1}XP)^2 = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\lambda = \pm 1, \mu = \pm 2$. On obtient ainsi 4 solutions :

$$\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EXERCICE 4 :

1) $\forall k,\ ABA^k - BA^{k+1} = (AB - BA)A^k = AA^k = A^{k+1}$.

Pour la récurrence on procède ainsi :

Initialisation : si $k = 0$, la relation à montrer est justement l'hypothèse $AB - BA = A$.

Hérédité : On suppose vrai $A^kB - BA^k = kA^k$. Alors :

$$\begin{aligned} A\left(A^kB - BA^k\right) = A \cdot kA^k \quad &\Leftrightarrow \quad A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad A^{k+1}B - \left(BA^{k+1} + A^{k+1}\right) = kA^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$

2) $\forall k,\ \Phi\left(A^k\right) = kA^k$ par (1). Donc si $A^k \neq 0$ alors k est valeur propre de Φ.

Or, $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ donc Φ ne peut avoir plus que n^2 valeurs propres.

Donc forcément il existe un $k \leq n^2$ tel que $A^k = 0$.