Emmanuel Hebey
Année 2024-2025

Algèbre linéaire 3
Examen Janvier 2025
(Durée 2 heures)

Le barème est donné à titre indicatif. Toute note supérieure à 20 sera ramenée à 20. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1: Soit A la matrice réelle 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

(1) (1 pt) Calculer le déterminant de $A - 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3.

(2) (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(3) (1 pt) Trouver les valeurs propres de A.

(4) (3 pts) Déterminer les espaces propres de A.

(5) (2 pts) Montrer que A est diagonalisable. Donner une matrice P inversible 3×3 et une matrice D diagonale 3×3 qui sont telles que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 2: Soit A la matrice réelle 3×3 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

On admet que le déterminant de la matrice $A + 3I_3$ vaut zéro, où I_3 est la matrice identité 3×3.

(1) (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A et trouver les valeurs propres de A.

(2) (1 pt) Déterminer le rang de $A - 2I_3$.

(3) (1 pt) La matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

(4) (1 pt) La matrice A est-elle trigonalisable ? Pourquoi ?

Exercice 3: Soit A la matrice réelle 2×2 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

(1) (2 pts) Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P inversible 2×2 et une matrice D diagonale 2×2 telles que $P^{-1}AP = D$. Donner l'expression de P^{-1}.

On veut maintenant résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$ avec X matrice réelle 2×2. On rappelle que si A et B sont deux matrices carrées $n \times n$ qui commutent, si A a n valeurs propres distinctes et si P inversible est telle que $P^{-1}AP$ est diagonale, alors $P^{-1}BP$ est elle aussi automatiquement diagonale.

(2) (2 pts) Montrer que si $X^2 = A$ alors X et A commutent, se ramener à une équation du type $M^2 = D$ où M est diagonale et D est la matrice diagonale de la question (1) et trouver ensuite toutes les solutions de l'équation $X^2 = A$.

Exercice 4: Soit $n \geq 2$ un entier et soient A, B deux matrices réelles $n \times n$ qui vérifient que $AB - BA = A$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$.

(1) (2 pts) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1}$. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a la relation $A^kB - BA^k = kA^k$.

(2) Bonus: (2 pts) On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$\Phi(M) = MB - BM$$

pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admet que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est nilpotente, à savoir qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.