Emmanuel Hebey
Année 2023-2024

Algèbre linéaire 3
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)

(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)

Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f(x,y,z) = (x - 3y - z, 2x + y + 5z, x + 2y + 4z) \ .$$

(1) (1 pt) Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.

(2) (1 pt) L'application f est-elle injective ?

(3) (1 pt) Donner le rang de f. L'application f est-elle surjective ?

(4) (1 pt) Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

(5) (1 pt) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f(x,y,z) = (x + y + z, -x + 3y + z, x - y + z) \ .$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) (0,5 pt) Ecrire la matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

(2) (1,5 pts) Montrer que le polynôme caractéristique de f est égal à $-(X-1)(X-2)^2$ et déterminer les valeurs propres de f.

(3) (4 pts) Déterminer les espaces propres de f.

(4) (1 pt) Montrer que f est diagonalisable.

(5) (1 pt) Donner une base $\tilde{\mathcal{B}}$ qui diagonalise f, écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, et donner $D = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ la matrice de représentation de f dans $\tilde{\mathcal{B}}$ (au départ et à l'arrivée). Si A est la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ (au départ et à l'arrivée), si M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ et si D est comme ci-dessus, quelle relation relie A, D et M ?

Exercice 3: Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ deux réels donnés. On construit la suite $\big((u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 5v_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(1) (1 pt) Ecrire le système ci-dessus sous forme d'une équation matricielle reliant $X_{n+1} = AX_n$. Trouver puis démontrer ensuite rigoureusement la relation qui relie X_n, A^n et X_0.

(2) (2 pts) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), diagonaliser A. Trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

(3) (1 pt) Que vaut P^{-1} ?

(4) (1 pt) On pose $\tilde{X}_n = P^{-1}X_n$. Quelle relation relie $\tilde{X}_n$, D^n et $\tilde{X}_0$?

(5) (2 pts) Donner les expressions de u_n et v_n en fonctions de n, u_0 et v_0.

Exercice 4 (bonus): Les deux questions sont indépendantes.

(1) (1,5 pts) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $p_x \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^{p_x}(x) = 0$, où $f^{p_x} = f \circ \cdots \circ f$ (p_x fois). Montrer qu'il existe alors $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^p(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

(1) (1,5 pts) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (ou pas). Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que l'on a toujours $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, puis que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, où $f^2 = f \circ f$.