Emmanuel Hebey
Année 2022-2023

Algèbre linéaire 3
Examen
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Les calculatrices sont interdites. Des calculs dont vous pourriez avoir besoin (ou pas) sont proposés en fin d'énoncé

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f(x,y,z) = (3y+2z, -2x+5y+2z, 2x-3y) \ .$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) (1 pt) Ecrire la matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

(2) (2 pts) Montrer que le polynôme caractéristique de f est égal à $-(X-1)(X-2)^2$ et déterminer les valeurs propres de f.

(3) (4 pts) Déterminer les espaces propres de f.

(4) (1 pt) Montrer que f est diagonalisable.

(5) (2 pts) Donner une base $\tilde{\mathcal{B}}$ qui diagonalise f, écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, et donner $D = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ la matrice de représentation de f dans $\tilde{\mathcal{B}}$ (au départ et à l'arrivée). Si A est la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ (au départ et à l'arrivée), si M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ et si D est comme ci-dessus, quelle relation relie A, D et M ?

Exercice 2: (1) (2 pts) Soit $a \in \mathbb{R}^\star$ un réel non nul et A_a la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ a & 0 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver $\alpha_a, \beta_a \in \mathbb{R}$, deux réels dépendant de a, pour lesquels on a $A_a^3 = \alpha_a A_a + \beta_a \mathrm{Id}_3$, où Id_3 est la matrice identité 3×3.

(2) (2 pts) On suppose $a \neq 1$. Donner une expression de A_a^{-1} en fonction de A_a^2, α_a et β_a. Dans le cas particulier où $a = -1$, et si on pose $A = A_{-1}$, que vaut A^{-1} ?

Exercice 3: Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ deux réels donnés. On construit la suite $\big((u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(1) (1 pt) Ecrire le système ci-dessus sous forme d'une équation matricielle reliant X_{n+1} à X_n.

(2) (1 pt) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), quelle relation relie X_n, A^n et X_0 ? Une fois la relation devinée, on la démontrera rigoureusement.

(3) (2 pts) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), diagonaliser A. Trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

(4) (1 pt) Que vaut P^{-1} ?

(5) (2 pts) On pose $\begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déduire de (2) la relation qui relie $\begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$, D^n et $\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix}$ pour tout n.

(6) (1 pt) On pose $u_0 = 6$ et $v_0 = -4$. Que valent $\tilde{u}_6$ et $\tilde{v}_6$? Et que valent u_6 et v_6 ?

Exercice 4 (bonus): (2 pts) Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Quelques calculs qui pourraient être utiles, d'autres pas: $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $2^3 = 8$, $2^6 = 64$, $7^3 = 343$, $4^6 = 4096$, $5^6 = 15625$, $3^6 = 729$, $2 \times 15625 = 31250$, $2 \times 4096 = 8192$, $3 \times 4096 = 12288$, $2 \times 31250 = 62500$, $31250 - 64 = 31186$, $3 \times 128 = 384$, $3 \times 57 = 171$, $4 \times 49 = 196$, $15625 + 192 = 15817$, $31186 + 171 = 31357$, $31250 - 12288 = 18962$, $128 - 15625 = -15497$, $31250 - 384 = 30866$, $3 \times 128 = 384$, $15625 + 384 = 16009$.