Emmanuel Hebey
Année 2021-2022

Algèbre linéaire 3
Examen
(Durée 2 heures)

(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f(x,y,z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z) .$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) (1 pt) Ecrire la matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

(2) (2 pts) Montrer que le polynôme caractéristique de f est égal à $-(X-1)(X+2)^2$.

(3) (1 pt) Déterminer les valeurs propres de f.

(4) (4 pts) Déterminer les espaces propres de f.

(5) (1 pt) Montrer que f est diagonalisable.

(6) (2 pts) Donner une base $\tilde{\mathcal{B}}$ qui diagonalise f, écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, et donner $D = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ la matrice de représentation de f dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

(7) (1 pt) Si A est la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ (au départ et à l'arrivée), si M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ et si D est comme ci-dessus, quelle relation relie A, D et M ?

Exercice 2: Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) (1 pt) Calculer A^2.

(2) (2 pts) Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est le polynôme caractéristique de A, déterminer a, b, c et d.

(3) (2pts) Calculer A^6.

Exercice 3: Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ deux réels donnés. On construit la suite $\big((u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n \end{cases}$$

(1) (1 pt) Ecrire le système ci-dessus, reliant $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, sous forme matricielle.

(2) (1 pt) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), quelle relation relie $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, A^n et $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ pour tout n ?

(3) (2 pts) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), diagonaliser A. Trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

(4) (1 pt) Que vaut P^{-1} ?

(5) (2 pts) On pose $\begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déduire de (2) la relation qui relie $\begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$, D^n et $\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix}$ pour tout n.

(6) (1 pt) On pose $u_0 = 2$ et $v_0 = -1$. Que valent $\tilde{u}_6$ et $\tilde{v}_6$? Et que valent u_6 et v_6 ?