Emmanuel Hebey
Année 2021-2022

Algèbre linéaire 3
Examen 2bis
(Durée 2 heures)
(Le barème est donné à titre indicatif)
(Les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20)
(Les documents sont interdits)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f(x, y, z) = (-x + 2y + 3z, -2y, x + 2y + z) \ .$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) (1 pt) Ecrire la matrice de représentation de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

(2) (2 pts) Montrer que le polynôme caractéristique de f est égal à $-(X - 2)(X + 2)^2$.

(3) (1 pt) Déterminer les valeurs propres de f.

(4) (4 pts) Déterminer les espaces propres de f.

(5) (1 pt) Montrer que f est diagonalisable.

(6) (2 pts) Donner une base $\tilde{\mathcal{B}}$ qui diagonalise f, écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, et donner $D = M_{\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ la matrice de représentation de f dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

(7) (1 pt) Si A est la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ (au départ et à l'arrivée), si M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ et si D est comme ci-dessus, quelle relation relie A, D et M ?

Exercice 2: (3 pts) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3: Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ deux réels donnés. On construit la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \ .$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

(1) (2 pts) Ecrire l'équation de récurrence ci-dessus sous forme matricielle faisant intervenir les X_n.

(2) (2 pts) Si A est la matrice qui intervient à la question (1), diagonaliser A. Trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

(3) (1 pt) Que vaut P^{-1} ?

(4) (2 pts) On suppose $u_0 = u_1 = 1$. Que vaut u_n pour $n \geq 2$? En particulier, que valent u_4 et u_6 ?