Université de Cergy-Pontoise, MS3-I-P.
Examen, 10 janvier 2014 (3h).

Les téléphones, tablettes et calculettes sont interdits. Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4 manuscrite au stylo bleu comportant le nom de l'étudiant. On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Barème indicatif sur 27.

Exercice 1. : (5 pts) Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x;y) = x^2 + y^2$ et $g(x;y) = x + y$. Soit $\Gamma = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Montrer en détail que f et g sont C^1.
2. Montrer que f a un seul point critique. Est-ce un extrémum ? Si oui, est-il global ?
3. Déterminer les points critiques de g sur la courbe Γ.
4. Montrer que les extréma de g sur Γ sont un maximum et un mininum globaux. On précisera les valeurs maximale et minimale de g sur Γ.

Exercice 2. : (5 pts). Soit $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x \in [1;2], y \in [-1/2;1/2] \,\text{avec}\, 1 \leq x+y \leq 2 \,\text{et}\, 1 \leq x-y \leq 2\}$ et

$$I \;=\; \iint_\Omega e^{x-y} \ln(1+x+y)\, dxdy\,.$$

Soit $F : [1;2] \times [1;2] \longrightarrow \Omega$ donnée par

$$F(u;v) \;=\; \Big(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2}\Big)\,.$$

1. Montrer que F est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans Ω) et bijective.
2. Montrer que F est C^1 et que son jacobien J_F vérifie $J_F(u;v) = -\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la fonction g donnée par

   $$[1;2] \times [1;2] \ni (u;v) \;\mapsto\; e^v \ln(1+u) \in \mathbb{R}\,.$$

   est continue.
4. Calculer explicitement I.

Exercice 3. : (3 pts). Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0;0) = 0$ et, pour $(x;y) \neq (0;0)$,

$$f(x;y) \;=\; \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$.
2. f est-elle continue en $(0;0)$?

Tournez, SVP.

Exercice 4. : (4 pts). Étudier la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, où, pour tout $n > 0$,

$$u_n = 2^n , \quad v_n = \frac{1}{n^3 + n\ln n} , \quad w_n = \frac{(-1)^n n^2}{3^n} \quad \text{et} \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{(n^2)} .$$

Exercice 5. : (5 pts). Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt .$$

On rappelle que $\operatorname{Arctan} 0 = 0$, $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \pi/2$.

1. Montrer que F est bien définie et continue. Que vaut $F(0)$?
2. Soit $a > 0$. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$$
est convergente. Montrer que, pour tout $x \geq a$, pour tout $t \geq 0$,
$$\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-at}}{2} .$$
3. En déduire que F est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 6. : (5 pts). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ données par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^4 + |x|} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{(n+1)^2}{n} x^n .$$

1. Montrer que la somme f de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ existe et est continue sur $\mathbb{R}$. Donner un ensemble E sur lequel f est dérivable.
2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} g_n$ vaut 1. Soit g sa somme.
3. Soit $G :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la primitive de g qui s'annule en 0. Montrer que
$$\forall x \in]-1; 1[, \quad G(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} x^n + xS(x) , \quad \text{où} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} . \tag{1}$$
On justifiera la convergence des séries intervenant dans la formule (1).
4. Montrer que S est dérivable sur $]-1; 1[$ et donner une expression de sa dérivée S'.
5. En déduire que
$$\forall x \in]-1; 1[, \quad g(x) = \frac{x(3-2x)}{(1-x)^2} - \ln(1-x) . \tag{2}$$

Fin de l'épreuve.