Deuxième Année de Licence I et P Analyse

Examen final, 11 janvier 2013, durée : 3h

Les calculatrices, les téléphones portables, les ordinateurs, les documents sont interdits.

Exercice 1 : Séries élémentaires.

1. Justifier que les séries suivantes sont convergentes et donner leur somme de $n = 0$ à l'infini.

$$a) \sum \frac{2^n}{n!} \qquad b) \sum \frac{1}{3^n} \qquad c) \sum \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

Indication pour c) : mettre au même dénominateur la somme de fractions $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. Donner la nature des séries suivantes (justifier) :

$$a) \sum_{n \geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2}) \qquad b) \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad c) \sum \sin(\frac{n}{n^2+1})$$

3. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes (justifier).

$$a) \sum \frac{1}{n^2+1} x^n \quad b) \sum 3^n x^n \quad c) \sum n 2^n x^n$$

Exercice 2 : On définit la fonction F de la façon suivante. On pose pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

1. Justifier que F est dérivable et donner sa dérivée.
2. Montrer que F a une limite en $+\infty$. On admettra que cette limite vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. À l'aide d'un changement de variable, calculer pour tout $\lambda > 0$ la valeur de $I_\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2}\, dt$
4. On définit la fonction G sur $\mathbb{R}_+^*$ par $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$. Justifier que la fonction G est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et simplifier l'expression $G(x) - G'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3 : Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout (x, y) par :

$$f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$$

1. f est-elle continue ? Dérivable ? Justifier brièvement.
2. Donner les dérivées partielles premières de f en tout point.
3. Montrer que f n'admet pas d'extremum global.
4. Calculer les points critiques de f et dire s'il y a des extrema locaux en ces points.
5. Soit $K = [-1; 0] \times [-1; 0]$. f admet-elle des extrema globaux sur K ? Justifier, et donner ces extrema dans le cas d'une réponse positive.

Exercice 4 : L'objectif de cet exercice est de déterminer l'écart moyen entre deux nombres pris au hasard uniformément dans $[0; 1]$. On admettra que cet écart moyen est donné par la formule :

$$\delta = \frac{1}{Aire(D)} \iint_D |y - x|\, dx\, dy$$

où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

Soit T le domaine du plan défini par :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

1. Dessiner D et T.
2. Calculer $\iint_T |y - x|\, dx\, dy$
3. En déduire l'écart moyen demandé.
4. Sans faire de calcul, quelle est la formule qui donnerait l'écart entre deux nombres pris au hasard, l'un dans $[0, 1]$, l'autre dans $[0; 2]$?
5. (bonus, hors barême) Calculer la valeur de la question précédente.