Deuxième Année de Licence I et P Analyse

Examen final, 6 janvier 2012, durée : 3h

Les calculatrices, les téléphones portables, les ordinateurs, les documents sont interdits.

Exercice 1 : Séries élémentaires.

1. Dire si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes. Justifier.

$$a) \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \quad b) \sum \sin(\frac{1}{n^2}) \quad c) \sum \frac{e^{cosn}}{2^n}$$

2. Discuter suivant la valeur du réel a la nature de la série $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$
3. Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes (justifier).

$$a) \sum \frac{1}{n^2+1} x^n \quad b) \sum 2^n x^n \quad c) \sum \frac{3^n}{n!} x^n$$

Exercice 2 : Le but de cet exercice est d'étudier les séries de Bertrand définies par $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ où α et β sont des paramètres réels.

1. Expliquez pourquoi ces séries sont définies à partir de $n = 2$.
2. Cas où $\beta = 0$. Rappelez la nature de la série suivant la valeur de α.
3. Cas où $\alpha = \beta = 1$. On est donc amené à étudier la série $\sum_{n>1} \frac{1}{n \ln n}$.
   (a) Calculer $\int_2^X \frac{1}{t \ln t}\, dt$ pour tout $X \geq 2$.
   (b) Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t}\, dt$ est divergente.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln t}\, dt \leq \frac{1}{n \ln n}$
   (d) Donner la nature de la série $\sum_{n>1} \frac{1}{n \ln n}$. Justifier !
4. Cas où $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. En reprenant la méthode de la question précédente, justifier cette fois-ci que la série converge.
5. (facultatif, pour ceux qui ont du temps) Etudier les autres cas.

Exercice 3 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout (x, y) par :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + (5 + x)(1 + y^2)$$

1. f est-elle continue ? Dérivable ? Justifier brièvement.
2. Donner les dérivées partielles de f en tout point.
3. Montrer que f n'admet pas d'extremum global.
4. Calculer les points critiques de f et dire s'il y a des extrema locaux en ces points.
5. Soit $K = [-5; 0] \times [-2; 2]$. Pourquoi K est-il compact ? Justifier que f admet des extrema globaux sur K. Trouver où sont les extrema et donner leurs valeurs.

Exercice 4 : Soit D le domaine du plan défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad y \geq 0 \quad \text{et} \quad y^2 \leq x\}$$

1. Dessiner D.
2. Donner les deux façons de calculer l'intégrale double : $I = \iint_D \frac{x}{1+y^2}\, dxdy$.
3. Calculer l'intégrale en évitant la fonction arctangente. On remarquera qu'une fraction rationnelle se simplifie.