Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2011

Épreuve de Mathématiques

S3 I et P

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - \frac{5}{2}x^2 - 4xy$$

1. Rechercher les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. On en trouvera quatre.
2. On trouve un seul point critique A dont les coordonnées sont strictement positives. Montrer qu'en ce point A la fonction f présente un minimum relatif, que l'on précisera. Est-ce un minimum absolu ?
3. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{4}$, et on appelle g la restriction de f à cette courbe. Montrer que g admet deux extremums relatifs que l'on calculera.

Second Exercice - 5 points

1. Montrer que $t \mapsto t \ln t - t$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \ln t$.
2. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^1 \ln x \, dx$$
est convergente et préciser sa valeur.
3. Soit I l'intégrale définie par :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$$
Montrer qu'elle est convergente. On fera une étude séparée pour la convergence en 0 et la convergence en $+\infty$.
4. En faisant le changement de variable
$$u = \frac{1}{t}$$
montrer que $I = 0$.

Troisième Exercice - 5 points

1. Étudier la convergence des séries numériques suivantes :
   (a)
   $$\sum \frac{1}{\ln(e^n - 1)} \qquad \text{pour } n \geq 1$$
   (b)
   $$\sum \frac{n^2}{2^n + n}$$
   (c)
   $$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad \text{pour } n \geq 1$$
2. On veut calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ de cette dernière série.
   (a) Montrer que
   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$
   (b) En déduire
   $$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$
   puis $S = \ln 2$.

Quatrième Exercice - 5 points

1. Déterminer le développement en série entière de
   $$f(x) = \frac{1}{2-x}$$
2. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
3. On admettra que le développement précédent convient lorsque x est complexe, de module strictement plus petit que R. En posant $x = e^{i\theta}$ et en séparant partie réelle et partie imaginaire, donner le développement en série de Fourier de
   $$h(\theta) = \frac{2 - \cos\theta}{5 - 4\cos(\theta)}$$
   Attention, on ne cherchera pas à calculer les coefficient de Fourier a_n et b_n par les formules du cours.