Université de Cergy-Pontoise
Mai 2010
L3-M-MI-MP Algèbre linéaire et bilinéaire

Première session - Durée 3 heures, documents et calculatrices interdits

---

Premier Exercice - Questions de cours - 4 points

1. Donner la définition d'un produit scalaire (dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)
2. Énoncer, en précisant les hypothèses, ce qu'est la décomposition de Dunford d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Deuxième Exercice - Exercices de cours - 6 points

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

   $$Montrerquelescoefficients$$

   (a_n) satisfont la relation de récurrence

   $$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$$

2. On suppose de plus que $f(0) = 1$. Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{(2n)!}$$

3. Quel est le rayon de convergence de la série entière solution ?
4. Pour $x \in I =]-\infty, 0[$, on pose

   $$g(x) = \cos(\sqrt{-x})$$

   Montrer que g est solution de (E) sur l'intervalle I.
5. Comparer f et g sur l'intervalle I.

Troisième Exercice - Intégrales multiples - 5 points

Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = [0,1] \times [0,1]$$

Δ le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et E le sous ensemble défini par :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

1. Calculer
$$I = \iint_D (ax^2 + by^2) dxdy$$
2. Calculer
$$J = \iint_\Delta (ax^2 + by^2) dxdy$$
On utilisera des coordonnées polaires.
3. Calculer
$$K = \iint_E \frac{2ydxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Quatrième Exercice - Intégrales impropres- 5 points

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - 1}}$$

On notera
$$f_n(x) = \frac{1}{x^n \sqrt{x^2 - 1}}$$

1. Donner un équivalent de f_n lorsque x tend vers $+\infty$ et en déduire que I_n converge dès que $n \geq 1$.
2. Donner un équivalent de f_n lorsque x tend vers 1 et en déduire que I_n converge pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que :
$$I_n = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$
On fera le découpage suivant :
$$f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} . \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
4. Calculer I_1. On pourra faire le changement de variable défini par $u = \sqrt{x^2 - 1}$. En déduire I_3, I_5 et I_{2p+1} où p est un entier.
5. Calculer la dérivée de $\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$ et en déduire I_2, I_4 et I_{2p} où p est un entier non nul.