Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2009
L2-I&P Mathématiques pour les Sciences

Première session - Durée 3 heures, documents et calculatrices interdits

---

Premier Exercice - Fonctions de plusieurs variables - 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$$

1. Déterminer le point critique de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f. Pourquoi ne peut-on déterminer la nature du point critique de f à l'aide des ces dérivées ?
3. Soit ϕ la fonction définie par
$$\phi(x) = f(x,x)$$
Déterminer un équivalent de $\phi(x)$ au voisinage de zéro, et en déduire que $f(x,y)$ prend des valeurs positives au voisinage de 0.
4. Soit ψ la fonction définie par :
$$\psi(x) = f(x,-x^3)$$
Déterminer un équivalent de $\psi(x)$ au voisinage de 0 et en déduire que f prend des valeurs négatives au voisinage de zéro.
5. Conclure sur la nature du point critique de f.

Deuxième Exercice - Intégrales impropres- 5 points

Soit a un réel. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de a cette intégrale est convergente.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Faire le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ dans l'intégrale I_a, et en déduire la valeur de I_a dans le cas général.

Troisième Exercice - Séries numériques - 5 points

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes :
   (a) $\sum \frac{2^n}{n!}$
   (b) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
   (c) $\sum (1+\sqrt{n})^{-n}$
2. Soit $w_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$.
   (a) Justifier que la série $\sum w_n$ est convergente.
   (b) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction

   $$\frac{X}{X^4+X^2+1}$$

   On vérifiera d'abord que

   $$X^4+X^2+1 = (X^2-X+1)(X^2+X+1)$$

   (c) En déduire qu'il existe une suite (u_n) telle que

   $$w_n = u_{n+1} - u_n$$

   pour tout n.
   (d) Calculer

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Quatrième Exercice - Séries entières - 5 points

Soit $S(x)$ la série entière définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n$$

1. Déterminer le rayon R de convergence de cette série.
2. Rappeler le théorème de dérivation des séries entiéres et calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la série de $\sum x^n$.
3. Trouver des constantes réelles a, b et c telles que

   $$n^3 = an(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn$$

   pour tout n
4. En déduire l'expression de la fonction $S(x)$ en fonction de x.