MS3-I
Décembre 2007
Durée 3 heures

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen de Mathématiques

Calculatrice et document sont interdits. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut et ne sont pas rangé par difficulté croissante. Barème indicatif :4+4+5+4+3

Exercice 1 : Séries

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum \frac{n^5}{(n^2+8)2^n} \qquad \sum \frac{\cos n}{n^2+1} \qquad \sum \left(\int_0^1 \frac{1}{n^4+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \right) \text{ (On ne calculera pas l'intégrale)}$$

Exercice 2 : Intégrale double

Soient $T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, y \leq 2-x\}$ et $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 2-x, x^2+y^2 \leq 4\}$.

1. Représenter T et C.
2. Calculer $I = \iint_T x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
3. En déduire $J = \iint_C x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On pourra utiliser la formule de trigonométrie $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$.

Exercice 3 : Séries entières

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique est définie par $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique, en précisant sur quel intervalle est valable ce développement.
2. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif, telle que $S(0) = 1$ et S solution de l'équation différentielle : (E) : $4xS''(x) + 2S'(x) - S(x) = 0$
   Montrer que les a_n sont liés par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} a_n$.
3. En déduire une solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$ définie à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 4 : Fonction de deux variables

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I, dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. On pose

$$\Psi(x,y) = f(y-2x) + g(y+2x)$$

1. Calculer $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$.
2. Montrer que Ψ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$.
3. On suppose maintenant que $I = [0;1]$, déterminer et représenter le domaine $\mathcal{D}$ du plan sur lequel est définie la fonction Ψ.
4. Rappeler les définitions de la frontière d'une partie du plan, d'un ouvert et d'un compact du plan.
5. $\mathcal{D}$ est-il un ouvert, un fermé, un compact ?

Exercice 5 : Fonction définie par une intégrale

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on pose pour tout réel $y \in \mathbb{R}$:

$$H(x,y) = \int_0^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer les dérivées partielles de H.
2. On pose $\phi(x) = \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t$, écrire $\phi(x)$ à l'aide de la fonction H.
3. On admet que H est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\phi'(x)$.