MS3-I
Janvier 2006
Durée 3 heures

Examen de Mathématiques

Calculatrice et document sont interdits.
Barème indicatif : 4+5+4+7

Exercice 1 :

Soit la formule $f(x;y) = \dfrac{xy}{y-x}$.

1. Pour quels $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x;y)$ est-elle définie ? On note D l'ensemble de tous ces couples.
2. Représenter D ; D est-il un fermé, un ouvert, un compact ?
3. Montrer que f ne possède pas d'extremums relatifs.
4. f possède-t-elle un extremum absolu sur D ?

Exercice 2 :

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0;1],\ f(x,t) = \dfrac{e^t}{t+x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $F'(x)$.
   (b) En déduire que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) A l'aide d'un encadrement de la fonction f, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq F(x) \leq \dfrac{e-1}{x}$.
   (d) Déduire de la question précédente la limite de F en $+\infty$.

Exercice 3 :

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$a)\ \sum \ln\frac{n+2}{n} \qquad b)\ \sum \frac{2^n}{(2n)!} \qquad c)\ \sum \frac{\cos n}{n^2+1}$$

Exercice 4 :

On définit pour tout entier n strictement positif la fonction f_n par :

$$\forall x \in]0;1],\ f_n(x) = -\frac{x^n}{n}\ln x \text{ et } f_n(0) = 0$$

1. [Question de cours] Démontrer que $\forall x \in]-1;1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une fonction continue.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, étudier les variations de la fonction f_n, et déterminer $\alpha_n = \sup\{|f_n(x)|, x \in [0;1]\}$.
4. Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[0;1]$.
5. En utilisant sans les démontrer les deux résultats suivants : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ainsi que la décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{X(X+1)^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{(X+1)^2}$, calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n(n+1)^2}$.
7. En précisant bien tous les résultats des questions précédentes utilisés, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$$