

Examen de mathématiques 2.

Exo 1: on pose $x = e^t$ $dx = e^t dt$ $t: 0 \rightarrow x=1$ $t: \ln 2 \rightarrow x=2$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x+2} \quad x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} dx = \left[\ln(x+1) - \ln(x+2) \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 4 - \ln 2 + \ln 3 = \ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

$$\int_0^A t e^{-2t} dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2} t \right]_0^A + \frac{1}{2} \int_0^A e^{-2t} dt = -\frac{A}{2} e^{-2A} + \frac{1}{4} (1 - e^{-2A}) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

Exo 2: $\varphi(x,y) = 3 + x^2 + 2xy + 5y^2 = 3 + (x+y)^2 + 4y^2 \geq 3 = \varphi(0,0)$

Donc $\forall M \in \mathbb{R}^2$ $\varphi(M) \geq \varphi(0,0)$ donc φ possède un minimum global en $(0,0)$.

2.2: En un point critique $\begin{cases} 2x+2y+3z^2=0 \\ 2x+10y=0 \\ 3xz^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5y \\ -8y+3z^2=0 \\ 2z^2=0 \end{cases} \begin{cases} (0,0,0) \text{ est bien} \\ \text{un point critique} \\ \text{et c'est le seul.} \end{cases}$

$2z^2=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=0$ si $x=0$ alors $y=0$ alors $z=0$
si $z=0$ alors $y=0$ alors $x=0$

2.3: $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2+3z^2 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 2 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 10 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 6xz \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 3z^2 & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0 \end{cases}$

$P_H(\lambda) = ((2-\lambda)(10-\lambda)-4)(-\lambda)$ donc $\lambda=0$ est une valeur propre donc on ne peut pas conclure à l'aide du théorème des cours.

2.4: $\varphi(x,y,0) > 3$ pour $(x,y) \neq (0,0)$
 $\varphi(x,0,z) = 3 + x^2 + xz^3 = 3 + x(x+z^3)$ peut être négatif pour $z < 0$ et x petit.
 $\varphi(-t^3; 0; 2t) = 3 - t^3(7t^3) = 3 - 7t^6 < 3$ on $(-t^3; 0; 2t) \rightarrow (0,0,0)$ donc pas d'extremum en $(0,0,0)$

3.1: $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,y) = 2y + \frac{2y}{1+y^2}$ donc $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 + \frac{2}{1+y^2} - \frac{4y^2}{(1+y^2)^2} = 2 + \frac{2-2y^2}{(1+y^2)^2}$

3.2: $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,0) = x^3 + x$ donc $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,0) = 3x^2 + 1$ donc $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

3.3: $\varphi(x,y) = 3 + 0x + 0y + \frac{1}{2}(4x^2 + 2xy + 4y^2) + o(x^2+y^2)$.

3.4: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(3,0) = 6 + \frac{6}{4} \neq 0$ donc $(3,0)$ n'est pas un point critique donc pas d'extremum.
 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(3,0) = 6,6$ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(3,0) = 30$

3.5: $f(t) = \varphi(3e^{2t}; t)$ $f'(t) = 6e^{2t} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(3e^{2t}; t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(3e^{2t}; t)$
 $f''(t) = 36e^{4t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(3e^{2t}; t) + 12e^{2t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(3e^{2t}; t) + 12e^{2t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\dots) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\dots)$
Donc $f(0) = \varphi(3,0) = 12 + \ln(10)$ $f'(0) = 6 \times 6,6 + 30 = 69,6$

3.6: Non car $f'(0) \neq 0$.

3.7: $\varphi(1; 0,1) \approx \varphi(1,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,0) \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(1,0) (0,1)^2 = 4 + \ln 2 + 0,2 + \frac{3}{2} \times 0,01$

$\approx \ln 2 + 4,215$
Autre possibilité (moins bien)

$\varphi(1; 0,1) \approx \varphi(0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) \cdot 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0) \frac{1}{10} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) \frac{1}{100} \right)$