

Examen de mathématiques 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac, éteints et déposés à l'avant de l'amphi : il est interdit d'en avoir un sur soi ou sur sa table. Les documents sont interdits.

Barème indicatif : 6+6+8

Exercice 1: Calculer les intégrales suivantes.

Pour la première on pourra commencer par effectuer un changement de variable :

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^{2t} + 3e^t + 2} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt$$

Exercice 2: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ le champ scalaire $\varphi(x, y) = 3 + x^2 + 2xy + 5y^2$ et $\psi(x, y, z) = \varphi(x, y) + xz^3$

- Montrer par le calcul (sans utiliser de résultat du cours) que φ possède un minimum global en $(0, 0)$.
- Montrer que ψ possède un unique point critique M_0 que l'on déterminera.
- Déterminer la hessienne de ψ en M_0 , justifier le fait qu'elle ne permet pas de conclure à l'existence ou non d'un extremum de ψ en M_0 .
- Montrer que ψ ne possède aucun extremum local.

Exercice 3: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , vérifiant $\varphi(x; 0) = 3 + x^2 + \ln(1 + x^2)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x; 0) = 2x + \frac{2x}{1 + x^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x; 0) = x^3 + x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0; y) = 2y + \frac{2y}{1 + y^2}; \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x; 0) = 2 + \frac{2}{1 + x^2};$$

- Déterminer $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0; y)$.
 - Déterminer $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0; 0)$.
 - Écrire un DL₂ de φ en $(0; 0)$.
 - La fonction φ possède-t-elle un extremum local en $(3, 0)$?
 - On pose dans la suite pour tout réel t , $f(t) = \varphi(3e^{2t}; t)$, calculer $f(0)$; $f'(0)$ et $f''(0)$.
 - La fonction f possède-t-elle un minimum ou un maximum local en 0 ?
 - Proposer une valeur approchée de $\varphi(1; 0, 1)$ aussi précise que possible à l'aide des données de l'exercice.
-