L2 GC (S3) - Pré-Ing2 GC
3 juin 2025
Durée 1 heure 30

# Examen de mathématiques 2 : Session 2

---

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones et les objets connectés doivent être éteints, rangés dans un sac et placé au bord de l'amphi. Tous les documents sont interdits ainsi que les calculatrices.
Barème indicatif : 3+4+5+5+3

---

**Exercice 1:** Résoudre l'équation : $\cos x - \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

On pourra par exemple utiliser la formule $\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$.

**Exercice 2:** Soit la fraction rationnelle définie par $f(t) = \frac{1}{t^2+3t+2}$, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$

**Exercice 3:** Soit $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0;0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de $\varphi$ en $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Montrer $\varphi$ possède des dérivées partielles en $(0;0)$ que l'on calculera en revenant à la définition d'une dérivée partielle.
3. Pour $t \neq 0$, on pose $f(t) = \varphi(t,t)$, puis calculer $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$.
4. $\varphi$ est-elle continue en $(0;0)$ ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 4:** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\varphi(0;0) = 0$. Dans cet exercice on ne suppose pas que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$, on n'utilisera donc pas les matrices hessiennes.

1. Dans cette question on suppose que $\varphi(x,y) = x^2+y^2$, montrer que $\varphi$ possède un minimum global à l'origine.
2. Dans cette question on suppose que $\varphi(x,y) = x^2+y^2+(x^2+y^2)\varepsilon(x,y)$ avec $\lim_{(0;0)}\varepsilon = 0$, ce qui équivaut à $\varphi(x,y) = x^2+y^2+o(x^2+y^2)$, montrer que $\varphi$ possède un minimum local à l'origine.
3. Dans cette question on suppose que $\varphi(x,y) = 2x^2-y^2$, montrer que $\varphi$ ne possède pas d'extremum global à l'origine.
4. Dans cette question on suppose que $\varphi(x,y) = 2x^2-y^2+(x^2+y^2)\varepsilon(x,y)$ avec $\lim_{(0;0)}\varepsilon = 0$, ce qui équivaut à $\varphi(x,y) = 2x^2-3y^2+o(x^2+y^2)$, montrer que $\varphi$ ne possède pas d'extremum local à l'origine.
5. Dans cette question on suppose que $\varphi(x,y) = xy+(x^2+y^2)\varepsilon(x,y)$ avec $\lim_{(0;0)}\varepsilon = 0$, ce qui équivaut à $\varphi(x,y) = xy+o(x^2+y^2)$, montrer que $\varphi$ ne possède pas d'extremum local à l'origine.

**Exercice 5:** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(1;2) = 1; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(1;2) = 2; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(1;2) = -6$$

1. Écrire un $\mathrm{DL}_1$ de $\varphi$ en (1 ;2).
2. Pour des constantes réelles $a,b,c,d$, on pose pour tout réel $t$, $f(t) = \varphi\big(at+b; ct+d\big)$, calculer $f'(t)$, déterminer des constantes $a,b,c,d$ telles que $f(1) = 1$ et $f'(1) = -2$.
3. Écrire un $\mathrm{DL}_1$ de $f$ en 1.
4. (bonus) Pour deux constantes $u,v$ réelles, on pose pour tout réel $t$, $g(t) = \dfrac{\varphi(t^u; 2t^v)}{\varphi(t; vt)}$, déterminer $u$ et $v$ telles que $g(1) = 1$ et $g'(1) = 1$.

---