L2 GC (S3) - Pré-Ing2 GC
17 décembre 2024
Durée 2 heures

Examen de mathématiques 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac, éteints et déposés à l'avant de l'amphi : il est interdit d'en avoir un sur soi ou sur sa table. Les documents sont interdits.
Barème indicatif : 4+4+4+4+4

On rappelle les 2 DL en 0 suivants : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Exercice 1: Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\ \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+t^2}\ \mathrm{d}t$

Exercice 2: Soit φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - (x+y+z-3)^2$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de φ.
2. Montrer que φ possède un unique point critique que l'on déterminera.
3. Montrer, sans calculer les dérivées secondes, que φ ne possède pas d'extremum local.

Exercice 3: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = \frac{e^x - e^y}{x-y}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x,x) = e^x$.

1. Calculer pour $x \neq y$, calculer la dérivée partielle $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$.
2. Écrire un DL_1 de φ en $(1,0)$.
3. En déduire la direction à prendre à partir du point $(1,0)$ pour que la fonction φ varie le moins possible.
4. Montrer que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,t)$ existe et la calculer.

Exercice 4: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, ayant la matrice H comme matrice hessienne en $(1;2)$ avec :

$$\varphi(1;2) = -1; \quad \varphi(0;0) = 1; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(1;2) = 3; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(1;2) = 6; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0;0) = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0;0) = 0; \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};$$

1. Écrire un DL_2 de φ en $(1;2)$.
2. La fonction φ possède-t-elle un extremum local en $(1;2)$.
3. On pose dans la suite pour tout réel t, $f(t) = \varphi\Big(e^{2t}; \dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)$, calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Montrer que f possède un minimum local en 0.

Exercice 5 (cours): Soit $K \in \mathbb{R}$ et $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leqslant K$. On rappelle l'inégalité des accroissements finis qui affirme que $\forall x, \tilde{x} \in [0;1],\ |f(x) - f(\tilde{x})| \leqslant K|x - \tilde{x}|$

1. Justifier rapidement l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n}) - f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$
2. En déduire que : $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{2n}$
3. En déduire une valeur approchée de $I = \int_0^1 \cos(t^2)\ \mathrm{d}t$ à 10^{-2} près, sous la forme d'une somme.
4. Soit $\varphi : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x, y \in [0;1],\ |\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)| \leqslant K$ et $|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)| \leqslant K$, montrer que
$$\forall M, \tilde{M} \in [0;1]^2,\ |\varphi(M) - \varphi(\tilde{M})| \leqslant \sqrt{2}K\|\overrightarrow{M\tilde{M}}\|$$
On pourra poser $M = (x,y)$ et $\tilde{M} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, et appliquer l'inégalité des accroissements finis entre 0 et 1 à la fonction g (c'est à dire calculer et majorer $g(1) - g(0)$) définie par $g(t) = \varphi\big(x + t(\tilde{x} - x), y + t(\tilde{y} - y)\big)$.
5. **(Bonus)** Montrer que : $\displaystyle\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \varphi(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) - \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{K}{n}$