L2 GC (S3) - Pré-Ing2 GC
12 décembre 2023
Durée 2 heures

Examen de mathématiques 2 : Fonctions de plusieurs variables

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les téléphones et les objets connectés doivent être rangés dans un sac et éteints. Tous les documents sont interdits ainsi que les calculatrices.
Barème indicatif : 5+1+4+5+5

Exercice 1: Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{u(1+u)}\mathrm{d}u$

Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{\tan t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$, on effectuera le changement de variable $x = \cos t$

Exercice 2: Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = x\ln(1+x^2+y^2)$, calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$.

Exercice 3: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0;0) = 6$; $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0;0) = 2$; $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0;0) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0;0) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}(0;0) = 1$ et a et b deux réels, on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \varphi(t, at+bt^2)$.

1. Calculer $f'(t)$.
2. Calculer $f''(0)$.
3. Montrer que l'on peut choisir a et b tels que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$.
4. Montrer que pour les valeurs de a et b calculées à la question précédente la restriction de φ à la parabole d'équation $y = ax + bx^2$ possède un maximum local en $(0\,;0)$.

Exercice 4: Soit $\varphi :]0;+\infty[^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x,y,z \in]0;+\infty[;\ \ \varphi(x,y,z) = \frac{2}{xyz} + x^2 + y^2 + z^2$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de φ.
2. Montrer que si $(x_0,y_0,z_0) \in]0;+\infty[^3$ est un point critique de φ, alors $x_0 = y_0 = z_0$.
3. Déterminer l'unique point critique M_0 de φ
4. Déterminer la hessienne de φ en M_0.
5. La fonction φ possède-t-elle un minimum local, un maximum local ou un point col en M_0 ? On pourra pour cela utiliser sans la démontrer l'égalité suivante vraie pour tout réel x :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-2)^2(x+4)$$

Exercice 5 (Question de cours): Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée symétrique dont les valeurs propres λ_1, λ_2 vérifient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$

1. Justifier rapidement l'existence d'une matrice P orthogonale ($P^t = P^{-1}$) telle que $S = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^t$.
2. Pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on pose $U = P^tX = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, montrer que $\|U\| = \|X\|$.
3. Démontrer que pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a la relation
$$X^tSX = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 \geq \lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$
4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, dont $(0;0)$ est un point critique et dont la hessienne en $(0;0)$ est S.
   (a) écrire le DL_2 de φ en $(0;0)$
   (b) en déduire que φ possède en $(0;0)$ un minimum local.